ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT | JOURNAL

HERAUSGEGEBEN | RÉDIGÉ

VON | PAR

G. MITTAG-LEFFLER

31

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG
1908

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

PARIS
A. HERMANN.
6 RUE DE LA SORBONNE.

SUR L'UNIFORMISATION DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR

H. POINCARÉ

à PARIS.

§ 1. Introduction.

Dans un mémoire intitulé «Sur un théorème de la théorie générale des fonctions» (Bulletin de la Société Mathématique de France, tome 11, 1883), j'ai démontré que plusieurs fonctions analytiques d'une même variable indépendante peuvent toujours être égalées à des fonctions *uniformes* d'une même variable.

La question a été reprise par M. OSGOOD, puis par M. JOHANSSON: Ueber die Uniformisirung RIEMANN'scher Flächen mit endlicher Anzahl Windungspunkte (Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, tome 33, N° 7) et enfin dans un intéressant travail de M. BRODÉN, Bemerkungen über die Uniformisirung analytischer Funktionen (Lund, Berlingsche Buchdruckerei 1905) que nous aurons l'occasion de citer plus loin.

Mon premier mémoire laissait subsister plusieurs questions non résolues. 1° Pour tout point de la surface de RIEMANN, pour lequel les fonctions données existent, les fonctions uniformisantes se comportent régulièrement. Il y a exception pour trois de ces points qui constituent ce que M. HILBERT appelle des Ausnahmsstellen. Cette difficulté a été signalée de nouveau par M. HILBERT dans sa communication au Congrès des Mathematiciens de Paris en 1900.

Elle tient à ce qu'on introduit une fonction auxiliaire, inverse d'une fonction fuchsienne et que pour ces trois points, cette fonction auxiliaire n'existe pas. Il est possible de l'écarter, et cela de deux manières; d'abord en remplaçant la fonction auxiliaire par une autre, également inverse d'une fonction fuchsienne et qui ne présente pas le même inconvenient; c'est ce que je fais plus loin au § 4; l'autre manière consiste à se passer complètement de fonction auxiliaire, c'est ce que je fais aux § 13 et 14.

2°. Mes procédés permettaient bien de démontrer que l'on pouvait faire la représentation conforme de ma surface de RIEMANN sur une aire intérieure à un cercle; mais on ne voyait pas que ce fût possible sur un cercle; M. OSGOOD a écarté cette difficulté; nous aurons néanmoins à y revenir au § 8.

3°. On n'était pas certain que cette façon d'uniformiser les fonctions fût la plus simple de toutes; on était même certain du contraire par l'exemple des fonctions fuchsiennes. L'introduction de la fonction auxiliaire, arbitraire dans une large mesure, donnait à la solution un caractère artificiel dont il convenait de se débarrasser, et pour cela il fallait démontrer que toute surface de Riemann, simplement connexe, est représentable soit sur un cercle, soit sur une sphère pointée (ou ce qui revient au même sur le plan tout entier).

Le problème n'est autre chose que le problème de Dirichlet appliqué à une surface de Riemann à une infinité de feuillets. Malheureusement les procédés ordinaires ne sont pas toujours applicables pour deux raisons: 1° parce que le domaine auquel on veut l'appliquer n'est pas une aire plane à un seul feuillet, mais est formé de plusieurs feuillets superposés; 2° parce que les frontières de ce domaine ne sont pas nettement délimitées et que souvent même on ne peut pas les atteindre, mais s'en approcher pour ainsi dire par une suite indéfinie d'approximations. De là la nécessité de faire grande attention aux détails de la démonstration, ce qui entraîne une assez grande prolixité.

Dans le § 2, je précise la notion de la surface de Riemann qu'il va s'agir «d'uniformiser». Je la considère comme un domaine formé d'une suite d'éléments, imbriqués les uns dans les autres et correspondant aux divers éléments d'une fonction analytique au sens Weierstrassien du mot. Je montre comment on peut généraliser cette notion et la rendre plus souple, principalement par l'introduction des *éléments algébriques* qui permettent de traiter les points de ramification algébrique de la surface de Riemann comme faisant partie de cette surface. J'étudie les relations mutuelles des diverses surfaces de Riemann correspondant aux divers systèmes de fonctions analytiques.

Dans le § 3, je forme la fonction de Green relative à ma surface de Riemann; et je la représente par une serie qui converge quand cette fonction existe. Je modifie la démonstration donnée dans mon mémoire primitif en la rattachant à la *méthode du balayage* et je la simplifie par l'application du théorème de Harnack.

Dans la § 4, j'introduis la fonction auxiliaire majorante nécessaire pour assurer la convergence de la serie; je montre que cette fonction peut être choisie de façon à éviter les *Ausnahmsstellen*.

Dans le § 5, je déduis de la fonction de Green, la fonction analytique z qui doit assurer la représentation conforme de la surface de Riemann sur un cercle.

Dans le § 6, je généralise la méthode du balayage de façon à y faire rentrer celle que j'avais employée dans mon mémoire primitif.

Dans le § 7, je compare les diverses fonctions z qu'on peut déduire d'une

même surface de RIEMANN, et je montre qu'elles sont liées par des relations linéaires; je montre ensuite que chacune d'elles ne peut prendre plus d'une fois la même valeur.

Il s'agit ensuite de montrer que la surface de RIEMANN peut être représentée sur un cercle; c'est ce qu'a fait OSGOOD, je reproduis sa démonstration dans le § 8, mais en la présentant de manière à faire voir que c'est bien par la fonction z que se fait la réprésentation. Je donne ensuite du même théorème une seconde démonstration.

Dans les § 9, 10 et 11, j'étudie les propriétés des fonctions uniformisantes; je montre leur analogie avec les fonctions fuchsiennes, leurs relations avec un groupe analogue aux groupes fuchsiens et la possibilité de les représenter par des séries analogues aux séries thétafuchsiennes.

A la fin du mémoire, je cherche à me passer de la fonction auxiliaire majorante du § 4. Je considère un domaine D (ou surface de RIEMANN) simplement connexe, mais d'ailleurs quelconque. J'en enlève une aire simplement connexe, et il me reste un domaine D_1 doublement connexe. Au § 12 je forme la fonction de GREEN relative à ce domaine et je montre qu'elle existe toujours. Je suis amené ensuite à distinguer deux cas.

Le premier cas est examiné aux § 13 et 14; je montre que dans ce cas le domaine D_1 est représentable sur une couronne circulaire et le domaine D sur un cercle.

Dans le second cas que j'étudie au § 15, le domaine D_1 est représentable sur un cercle, et le domaine D sur une sphère.

Les critères qui permettent de discerner entre les deux cas peuvent se présenter sous des formes très différentes; on comparera celles que j'ai données au § 11, à la fin du § 12, au § 13, au § 15; et on les rapprochera des critère proposés par M. BRODÉN.

Le théorème final (§ 14 et 15) permettrait de démontrer l'existence des fonctions fuchsiennes d'un type donné, sans avoir recours ni à la méthode dite de continuité, ni à l'équation $\Delta u = e^u$.

§ 2. **Définition des domaines D.**

Représentons-nous une fonction analytique comme le faisait WEIERSTRASS. Un *élément de fonction*, c'est une série de puissances R convergente à l'intérieur d'un cercle C. Deux éléments sont *contigus* quand leurs cercles de convergence C et C' ont une partie commune, et quand en tout point de cette partie commune, les deux séries R et R' correspondant à ces deux éléments ont même somme.

Une *fonction analytique* sera alors constituée par un ensemble *dénombrable* d'éléments de fonction, tels que l'on peut passer de l'un quelconque de ces éléments E à un autre quelconque E' par une *chaîne* formée par un nombre fini d'éléments, le premier élément de la chaîne étant E et le dernier E', et chaque élément de la chaîne étant contigu au suivant et au précédent. Pourquoi cet ensemble doit-il être *dénombrable*, c'est ce que j'ai expliqué au tome 2 des Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Cela posé, voyons ce que nous devons entendre par le domaine $\boldsymbol{D}$ d'une fonction analytique $\boldsymbol{F}$ quelconque. C'est l'ensemble des cercles de convergence $\boldsymbol{C}$ relatifs aux différents éléments de $\boldsymbol{F}$, mais avec la convention suivante: *pour que deux points du domaine soient regardés comme identiques, il ne suffit pas qu'ils aient mêmes coordonnées.* Soient E et E' deux éléments de la fonction, C et C' les cercles de convergence correspondants; R et R' les deux séries correspondantes, soient M et M' deux points considérés comme appartenant le 1[er] à C, le 2[d] C', et ayant d'ailleurs mêmes coordonnées; les deux points coïncident donc au point de vue géométrique, mais il ne s'ensuit pas qu'ils soient identiques à notre nouveau point de vue; de l'un de ces deux points comme centre, je décris un cercle K assez petit pour être contenu tout entier tant dans C que dans C'; si les deux séries R et R' ont même somme à l'intérieur de K les deux points M et M' seront regardés comme identiques, sinon non. Ainsi notre domaine sera un plan à plusieurs feuillets et en général à une infinité de feuillets; ce sera une *surface de Riemann* analogue à la surface $\boldsymbol{S}$ envisagée dans le mémoire cité.

On pourra faire une convention différente; on pourra convenir que l'égalité des séries R et R' reste une condition *nécessaire* pour que les deux points M et M' soient identiques, mais que cette condition ne soit plus suffisante. Nous pourrons même convenir de regarder deux éléments de la fonction F comme non identiques, bien que les cercles C et C' correspondants soient les mêmes de même que les deux séries R et R'. Si par exemple on a $F=\sqrt{z}$, et qu'on parte d'un élément quelconque de cette fonction, l'élément sur lequel on retombera après avoir tourné deux fois autour du point $z=0$ sera généralement regardé comme identique à l'élément initial. Mais nous pourrons également convenir de le regarder comme différent.

On définira ainsi un autre domaine D', nous pourrons appeler D le *domaine principal* de la fonction F; les divers domaines D' seront les *domaines secondaires* de cette même fonction. Alors à chaque point d'un domaine secondaire D' correspondra un point et un seul du domaine principal D, mais à un point de D pourront correspondre plusieurs points de D' et en effet pour que deux points de D' soient identiques il faut, mais il ne suffit pas que les deux points correspondants de D soient identiques.

Pour définir un domaine secondaire D', nous devons, d'après ce qui précède, énoncer les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux de ses points M et M' doivent être regardés comme identiques. Le choix de ces conditions reste arbitraire dans une très large mesure, il est cependant soumis aux restrictions suivantes. Soient deux points M et M', ayant mêmes coordonnées et appartenant respectivement à deux éléments de fonctions; soient C et C' les deux cercles, R et R' les deux séries correspondant à ces deux éléments. Il s'agit de savoir à quelles conditions les deux points M et M' seront identiques.

1°. La condition que $R = R'$ dans le voisinage des points M et M' n'est plus suffisante, mais reste nécessaire.

2°. Si les points M et M' ont mêmes coordonnées il y aura une infinité de couples de points N et N' appartenant respectivement à C et à C' et qui auront mêmes coordonnées. Si M et M' sont identiques, il devra en être de même pour tous les couples de points tels que N et N'.

3°. Deux points identiques à un même troisième sont identiques entre eux.

4°. Si nous considérons deux éléments *quelconques* de la fonction F, et que les cercles correspondants soient C et C'; il faudra que l'on puisse passer de l'un à autre par une *chaîne* d'un nombre fini d'éléments, dont les cercles soient respectivement $C, C_1, C_2, \ldots, C_n, C'$; et de telle façon que si l'on considère deux cercles consécutifs de cette chaîne, il y ait un point intérieur à l'un qui soit identique à un point interieur à l'autre.

On voit aussi la possibilité de définir un domaine, indépendamment de toute fonction F. Il suffit de se représenter un ensemble dénombrable de cercles $C_1, C_2, \ldots$ en convenant que deux points appartenant à deux de ces cercles peuvent ne pas être identiques bien qu'ayant mêmes coordonnées, ou même que deux de ces cercles peuvent coïncider sans être regardés comme identiques. Il faut alors pour achever de définir le domaine, énoncer les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux points M et M' soient identiques; ces conditions devront rester soumises aux restrictions énoncées plus haut; la 1re ici n'a plus de sens, mais les 3 autres doivent subsister.

Les cercles $C_1, C_2, \ldots$, sont les éléments du domaine, et deux de ces éléments sont dits *contigus* quand les deux cercles ont une partie commune et que dans cette partie commune, les points correspondants sont identiques. Si alors D est le domaine principal ou un domaine secondaire d'une fonction F, et si deux éléments de D sont contigus, il en est de même des deux éléments correspondants de F; mais la réciproque, vraie pour le domaine principal, n'est pas vraie pour un domaine secondaire.

Observons maintenant qu'étant donnée une fonction analytique, on peut

construire pour cette fonction plusieurs domaines principaux. Il y a en effet une infinité de manières de décomposer cette fonction en un ensemble dénombrable d'éléments de fonctions. Soit par exemple la fonction $\sqrt{z}$, nous pouvons prendre une infinité d'éléments, dont les cercles de convergence iront tous passer par l'origine; mais les centres de ces cercles, qui doivent former un ensemble dénombrable pourront être choisis arbitrairement dans une certaine mesure. Il suffit de s'arranger de façon que tout point du plan soit intérieur au moins à l'un de ces cercles.

Comme nous pouvons choisir d'une infinité de manières ces cercles de convergence, il y a, si nous conservons la définition qui précède, une infinité de domaines qui peuvent être regardés comme le domaine principal d'une même fonction analytique. Tous ces domaines devront cependant être regardés comme *équivalents*. Cette notion de l'équivalence de deux domaines peut aussi se définir sans faire intervenir la fonction F. Deux domaines seront *équivalents* quand on pourra établir entre les points de l'un et ceux de l'autre une correspondance biunivoque, de telle façon qu'à tout point de l'un corresponde un point de l'autre et un seul, à deux points identiques de l'un deux points identiques de l'autre, à deux points non identiques de l'un, deux points non identiques de l'autre; et à deux points infiniment voisins de l'un, deux points infiniment voisins de l'autre.

Un domaine D est *contenu* dans un domaine D_1 quand à tout point de D correspond un point de D_1 et un seul; quand à un point de D_1 ne peut correspondre qu'ou bien un seul point de D, ou bien aucun point de D; quand enfin deux points de l'un sont identiques, non identiques ou infiniment voisins si les deux points correspondants de l'autre sont identiques, non identiques ou infiniment voisins.

Un domaine D sera *multiple* d'un domaine D_1, quand à tout point de D correspondra un point de D_1 et un seul, tandis qu'à tout point de D_1 correspondent plusieurs points de D ou même une infinité; de sorte que à deux points identiques de D correspondent deux points identiques de D_1, tandisque la réciproque peut ne pas être vraie; de sorte enfin qu'à deux points infiniment voisins de D correspondent deux points infiniment voisins de D_1. *Complétons toutes ces définitions* (domaines équivalents, contenus ou multiples) *en disant que deux points correspondants doivent avoir mêmes coordonnées.* Il est clair alors que si $\boldsymbol{D}$ est le domaine principal et $\boldsymbol{D}'$ un domaine secondaire d'une fonction analytique $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{D}'$ est multiple de $\boldsymbol{D}$.

Quelques remarques encore. Nous avons donné plus haut la définition d'une fonction analytique F et de son domaine principal D; mais si l'on s'en tient à cette définition, il est permis de supposer que la fonction pourrait encore être

prolongée analytiquement au delà de son domaine D, et que la frontière de ce domaine n'est pas une limite naturelle, mais une limite artificielle. C'est ainsi qu'un élément unique de fonction, une seule série avec son cercle de convergence satisferait à notre définition. Dans ce cas nous dirons que la fonction F est *incomplète*. Elle sera au contraire *complète*, si elle ne peut pas être prolongée, analytiquement en dehors de son domaine. Si on a une fonction incomplète, la fonction obtenue en la prolongeant analytiquement de toutes les manières possibles sera la fonction *complétée*. Il résulte de là que le domaine d'une fonction incomplète est contenu dans le domaine de sa fonction *complétée*.

Nous pouvons étendre la notion d'élément; et par exemple admettre des *éléments infinis* de fonction formés par la partie du plan *extérieure* à un cercle C, de centre a, et par une série procédant suivant les puissances *négatives* de $x-a$ et convergeant à l'extérieur du cercle C.

Ce n'est pas tout. Nous regardons en général la circonférence d'un de nos cercles comme ne faisant pas partie de l'élément correspondant. Si alors la fonctions F possède des pôles, d'après la définition précédente, ces pôles ne feraient pas partie de son domaine, puisqu'ils ne seraient à l'intérieur d'aucun de nos cercles de convergence mais seulement sur la circonférence, Mais nous pouvons envisager outre les éléments de fonction considérés jusqu'ici et que nous appellerons *éléments holomorphes*, et qui sont formés d'une série de puissances et de son cercle de convergence, nous pouvons, dis-je, envisager ce que nous apellerons des *éléments polaires* et qui seront formés d'un cercle de convergence et du *quotient* de deux séries de puissances. Si nous introduisons ces éléments, nous pouvons étendre le domaine D de la fonction F de façon que les pôles en fassent partie.

Nous pouvons même envisager une 3ᵉ sorte d'éléments, les *éléments algébriques* formés d'un cercle de convergence et d'une série de *puissances fractionnaires*, cela pourrait nous permettre d'étendre le domaine d'une fonction de façon que ses points de ramification algébriques en fissent partie. Ce seraient seulement des points *singuliers* de ce domaine, et les éléments correspondants seraient singuliers même au point de vue géométrique (c'est à dire en faisant abstraction de la fonction F qui leur a donné naissance) car un pareil élément ne serait pas un cercle simple, mais un cercle multiple, n^{ple} si n est le dénominateur des exposants fractionnaires de notre série; de telle façon qu'il y aurait à l'intérieur de ce cercle, n points, qui auraient mêmes coordonnées et qui devraient néanmoins être regardés comme distincts; et qui s'échangeraient entre eux quand on tournerait autour du centre du cercle. Nous pourrons nous placer tantôt à l'un, tantôt à l'autre de ces différents points de vue.

Nous pouvons envisager maintenant le domaine d'un ensemble de fonctions

analytiques. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$, un pareil ensemble. Un élément se composera d'un cercle de convergence C, et de p séries de puissances $R_1, R_2, \ldots, R_p$, convergentes à l'intérieur de ce cercle, et représentant respectivement une des déterminations des p fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$. Deux éléments $C, R_1, R_2, \ldots, R_p$ et $C', R'_1, \ldots, R'_p$ sont contigus quand C et C' ont une partie commune et quand on a dans cette partie commune $R_1 = R'_1$, $R_2 = R'_2$, $\ldots$, $R_p = R'_p$. Rien à changer d'ailleurs à la définition du domaine principal.

Quelle relation y a-t-il entre le domaine principal D de l'ensemble et les domaines principaux $D_1, D_2, \ldots, D_p$ des p fonctions considérées individuellement? Considérons un élément de D_1 et un point de cet élément, il pourra se faire qu'en ce point une des fonctions $F_2, F_3, \ldots, F_p$ n'existe pas; dans ce cas ce point n'appartiendra pas à D; il pourra se faire aussi que l'une de ces $p-1$ fonctions admette plusieurs valeurs, n par exemple; alors à ce point de D_1 correspondront n points de D qui devront être regardés comme distincts. Au contraire à tout point de D correspondra toujours un point de D_1 et un seul. Nous pouvons alors construire un domaine intermédiaire, D'_1, déduit de D_1 en supprimant tous les points de ce domaine auxquels ne correspondent aucun point de D; de sorte que D'_1 est contenu dans D_1 et que D est multiple de D'_1.

Deux points d'un domaine quelconque seront infiniment voisins s'ils ont des coordonnées infiniment peu différentes, et s'ils appartiennent à un même élément de ce domaine. Cela suffit pour qu'on comprenne ce qu'on doit entendre par une ligne continue tracée dans un domaine, par une ligne fermée, par une aire continue dont tous les points font partie d'un domaine, et par la frontière de cette aire. Le domaine sera alors *simplement connexe* si toute courbe fermée tracée sur ce domaine est la frontière complète d'une aire continue dont tous les points font partie du domaine.

§ 3. Formation de la fonction de Green.

Considérons un domaine D quelconque; soit C_0 un cercle représentant l'un des éléments de ce domaine, soit O un point intérieur à C_0; nous allons définir d'abord la fonction initiale u_0.

1°. A l'intérieur de l'élément C_0.

Soit O' un point extérieur au cercle C_0, de telle façon que la droite OO' passe par le centre de ce cercle, et que le produit des distances de ce centre aux deux points O et O' soit égal au carré du rayon du cercle. Alors si P est un point quelconque de la circonférence de C_0, le rapport $\frac{PO}{PO'}$ sera égal à une

constante K. C'est ce que nous exprimerons en disant que les points O et O' sont *inverses l'un de l'autre par rapport au cercle* C_0.

Si alors M est un point du domaine, intérieur à C_0, nous prendons pour la valeur de la fonction u_0 au point M:

$$u_0 = \log \frac{MO' \,.\, K}{MO}$$

On voit que u_0 devient logarithmiquement infini au point O, est toujours, positif à l'intérieur de C_0 et nul sur la circonférence ce de cercle; u_0 peut être regardé comme le potentiel logarithmique dû à une masse $+ 1$ placée au point O et à des masses negatives réparties sur la circonférence de C_0.

2°. Dans les éléments contigus à C_0.

Si C_1 est un élément contigu à C_0, on aura dans la partie commune à C_1 et à C_0

$$u_0 = \log \frac{MO' \,.\, K}{MO}$$

et en dehors de cette partie commune

$$u_0 = 0$$

3°. Dans les éléments non-contigus à C_0, ou aura partout $u_0 = 0$.

On voit d'après cela que la fonction u_0 est partout positive ou nulle, qu'elle est continue, mais que ses dérivées ne le sont pas.

Nous allons maintenant définir une suite indéfinie de fonctions:

$$(1) \qquad u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

Ces fonctions, comme nous allons le voir, seront toutes positives ou nulles: elles seront finies, sauf au point O, où elles deviendront logarithmiquement infinies de telle façon que la différence $u_n - u_0$ reste finie. De plus elles seront continues mais leurs dérivées ne le seront pas. Et ceci nous amène à définir ce que nous appelons les *masses génératrices*. Ces masses sont réparties le long des lignes de discontinuité de ces dérivées. Soit dans un élément du domaine L une de ces lignes de discontinuité; la fonction u, d'après ce qui précède est continue, mais il n'en est pas de même de ses dérivées, et en particulier la «dérivée normale» $\frac{du}{dn}$ relative à la ligne L subit un saut brusque, quand on franchit cette ligne. C'est ce saut brusque divisé par 2π qui représente la densité de la masse génératrice le long de la ligne L. Les masses ainsi réparties le long des lignes de discontinuité sont comme nous le verrons toutes négatives, et il faut y adjoindre une masse positive égale à $+ 1$ et située au point O.

Nous allons voir comment nous passons de l'une des fonctions de la série (1) à la suivante; comme nous connaissons u_0, toutes les autres fonctions de la série (1) se trouveront ainsi définies. *Le passage de la fonction u_n à la fonction u_{n+1} se fera par la méthode du balayage,* que j'ai exposée dans *l'American Journal of Mathematics* tome 12.

Considérons la fonction u_n, soit C_K l'élément du domaine D que nous nous proposons de balayer. Envisageons les masses génératrices négatives relatives à la fonction u_n et situées à l'intérieur de C_K; elles sont réparties le long de certaines lignes de discontinuité L. Soit ds un élément de l'une de ces lignes, et $-\mu ds$ la masse génératrice négative située sur cet élément. Alors nous aurons pour la valeur de la fonction $u_{n+1}-u_n$ au point M:

1°. A l'intérieur de C_K:

$$u_{n+1}-u_n = \int \mu\, ds \log \frac{MQ' \,.\, PQ}{MQ \,.\, PQ'}$$

Q est le centre de gravité de l'élément ds, Q' est inverse de Q par rapport au cercle C_K, le point P est un point quelconque de la circonférence de C_K; quel que soit d'ailleurs ce point, le rapport $\frac{PQ}{PQ'}$ conservera la même valeur, puisque Q et Q' sont inverses par rapport à C_K. L'intégrale doit être étendue à tous les éléments de toutes les lignes ds de discontinuité L intérieures à C_K.

2°. Dans un élément C_h contigu à C_k.

On aura encore:

$$u_{n+1}-u_n = \int \mu\, ds \log \frac{MQ' \,.\, PQ}{MQ \,.\, PQ'}$$

dans la partie commune à C_h et à C_k, et

$$u_{n+1}-u_n = 0$$

en dehors de cette partie commune.

3°. Dans un élément non contigu à C_k on aura partont $u_{n+1}-u_n = 0$.

Il résulte de là, que la fonction $u_{n+1}-u_n$ est partout positive ou nulle; qu'elle est continue; que c'est un potentiel logarithmique, engendré par des masses génératrices positives μds placées sur les divers éléments ds des lignes de discontinuité L intérieures à C_k, et par des masses négatives réparties sur la circonférence de C_k. La densité de cette matière génératrice négative en un point P de cette circonférence est.

$$\int \frac{\mu\, ds}{2\pi}\left(\frac{\cos\varphi'}{PQ'} - \frac{\cos\varphi}{PQ}\right)$$

φ et φ' étant les angles que fait le rayon mené de P au centre de C_k avec les droites PQ et PQ'. On voit que cette densité est toujours finie quelle que soit la position du point P sur la circonférence C_k.

Nous voyons alors que pour la fonction u_{n+1}, les masses négatives qui se trouvaient sur les lignes L intérieures à C_k ont disparu; car les masses négatives qui engendraient u_n sont égales et contraires aux masses positives qui engendrent $u_{n+1} - u_n$. Les masses négatives qui se trouvaient à l'intérieur de C_k en ont été *balayées*. Si le point O est intérieur à C_k, il s'y trouvait une masse positive $+1$, qui était l'une des masses génératrices de u_n. Le balayage ne porte pas sur cette masse positive qui subsiste et demeure l'une des masses génératrices de u_{n+1}. Ainsi aucune des masses génératrices de u_{n+1} n'est à l'intérieur de C_k, sauf la masse positive $+1$ qui pourrait se trouver au point O. Donc en aucun point de C_k, (sauf au point O, si ce point est intérieur à C_k) il n'y a de masse génératice de u_{n+1}. Donc en tout point de C_k sauf en O, la fonction u_{n+1} est une fonction *harmonique*, finie et continue ainsi que ses dérivées et satisfaisant à l'équation de Laplace $\Delta u_{n+1} = 0$.

On voit de plus que les lignes de discontinuité L ne sont autre chose que les circonférences des différents cercles qui représentent les éléments du domaine.

J'ai expliqué dans le mémoire cité, (American Journal, page 225) comment on peut choisir l'ordre des balayages de façon que chaque élément du domaine soit balayé une infinité de fois.

Nous avons donc une série de fonctions

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

toujours positives et toujours croissantes; c'est à dire que nous avons une série

$$\sum (u_{n+1} - u_n) \tag{1}$$

dont tous les termes sont positifs ou nuls. Deux hypothèses sont possibles; la série converge ou elle diverge. Voici ce que nous apprend à ce sujet le *théorème de Harnack*.

D'après ce théorème, si on a une série

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$$

et qu'à l'intérieur d'un certain cercle, le terme général f_n soit une fonction *harmonique* et *positive;* si la série converge en un point intérieur au cercle, elle convergera en tout autre point intérieur au cercle; de plus la convergence sera uniforme et la série obtenue en la différentiant une ou plusieurs fois terme à terme sera aussi uniformément convergente.

Cela posé, considérons un élément C_k. Cet élément est balayé une infinité de fois. Soient

$$u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \ldots, u_{\alpha_n}, \ldots$$

les fonctions obtenues immédiatement après ces différents balayages. Si le point O n'est pas intérieur à C_k, toutes ces fonctions sont harmoniques à l'intérieur de C_k; en tout cas, que O soit ou ne soit pas intérieur à C_k, les différences de ces fonctions seront harmoniques à l'intérieur de C_k. Donc la série

$$\sum (u_{\alpha_{n+1}} - u_{\alpha_n}) \tag{2}$$

a tous ses termes harmoniques et positifs et nous pouvons lui appliquer le théorème de Harnack, si donc elle converge en un point de C_k, elle convergera dans ce cercle tout entier. Si la série (2) converge, u_{α_n} tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment, ce qui montre que u_n ne croît pas indéfiniment avec n, c'est à dire que la série (1) converge. La condition nécessaire et suffisante pour que (2) converge, c'est que (1) converge. Si donc (1) converge en un point de C_k, elle convergera dans tout C_k, et on en déduit aisément que si elle converge en un point du domaine D, elle convergera dans ce domaine tout entier.

De plus d'après le théorème de Harnack, si la convergence a lieu, elle sera uniforme, et on pourra différentier la série terme à terme, une ou plusieurs fois, la convergence restant uniforme; de sorte que la somme de la série sera une fonction harmonique.

Nous sommes donc en présence de deux hypothèses seulement.

1°. Ou bien u_n croît indéfiniment avec n et cela pour tous les points du domaine D.

2°. Ou bien, pour tous les points de D, u_n tend vers une limite u, et cette limite que nous appellerons *fonction de Green* est une fonction harmonique, sauf au point O; et dans le voisinage de O, la différence $u - u_0$ est harmonique. Cette fonction de Green est partout positive ou nulle.

Voyons quelle est l'influence de l'ordre des balayages. Je dis que la fonction u ne dépend pas de l'ordre des balayages, pourvu que chaque élément soit balayé une infinité de fois. Soit

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$
$$u'_0, u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, \ldots$$

deux suites de fonctions obtenues par balayages successifs et ayant respectivement pour limites u et u'. Observons que la fonction initiale est la même pour les deux suites:

$$u_0 = u'_0 .$$

On a donc $u' > u_0$ puisque $u' > u'_0$; je dis que si $u' > u_n$, on aura également $u' > u_{n+1}$. Si on passe de u_n à u_{n+1} en balayant l'élément C_k, on a en dehors de C_k, $u_n = u_{n+1}$ et par conséquent $u' > u_{n+1}$. A l'intérieur de C_k, on voit que u' est une fonction harmonique, et il en est de même de u_{n+1} puisque C_k vient d'être balayé. Il en sera donc de $u' - u_{n+1}$, même si O est à l'intérieur de C_k. Or sur la circonférence de C_k on a $u_{n+1} = u_n$, et par conséquent $u' > u_{n+1}$. On aura donc encore à l'interieur de C_k

$$u' > u_{n+1}.$$

On en conclut par récurrence que

$$u' > u_n$$

et à la limite

$$u' \geq u.$$

On trouverait de même

$$u > u'_n \qquad u \geq u'.$$

Donc

$$u = u'.$$

Si dans la formation de la suite des u'_n, tous les éléments n'étaient pas balayés une infinité de fois, ce raisonnement ne serait plus applicable, parce que la fonction u' ne serait pas partout harmonique, des masses génératrices pouvant rester dans des éléments qui auraient fini par ne pas être balayés. Mais la fonction u resterait harmonique et on aurait toujours

$$u > u'_n, \qquad u \geq u'.$$

Peut-on appliquer les mêmes procédés, quand le domaine comprend ce que nous avons appelé un *élément algébrique* (c'est à dire un cercle multiple, vide supra § 2 in fine). Oui, mais il faut expliquer comment on peut balayer un pareil élément. Soit C_k le cercle en question, A son centre, et supposons que ce cercle soit n^{ple}, c'est à dire que chaque point intérieur à C_k représente n points du domaine regardés comme distincts et qui s'échangent entre eux quand on tourne autour de A. Nous construirons un autre cercle C' ayant pour centre un point quelconque B; de telle façon qu'à tout point M du cercle C_k de coordonnées polaires ρ et ω, corresponde un point M' du cercle C' de coordonnées polaires, $\sqrt[n]{\rho}$ et $\frac{\omega}{n}$. La fonction u_p avant le balayage est une fonction harmonique des coordonnées de M, sauf le long de certaines lignes de discontinuité L où il y aura des masses génératrices négatives. Ce sera donc aussi une fonction harmonique des coor-

données de M' sauf le long det lignes L' formées par les points correspondants de ceux de L. Le long de ces lignes L, il y a aussi des masses génératrices négatives, et en effet la fonction u_p considérée comme fonction des coordonnées du point M', est continue le long de ces lignes, mais ses dérivées premières ne le sont pas. Nous pourrons balayer par le procédé ordinaire, celles de ces masses négatives qui sont à l'intérieur de C', (puisque C' est un cercle simple, et non plus un cercle multiple comme C_k); on définira ainsi la fonction u_{p+1}. On voit que, en dehors de C_k ou aura $u_p = u_{p+1}$; de même sur la circonférence de C' et par conséquent sur celle de C_k. A l'intérieur de C_k, on aura $u_{p+1} > u_p$ et u_{p+1} sera harmonique. Ainsi nous pouvons faire la représentation conforme du cercle multiple C_k sur le cercle simple C', et appliquer la méthode du balayage au cercle C'. De même si nous avions des *éléments infinis*, nous ferions la représentation conforme de la partie du plan extérieure au cercle C_k, sur l'intérieur d'un cercle C' et nous appliquerions la méthode du balayage à ce cercle C'.

Comparons maintenant les fonctions de Green u et u' relatives à deux domaines D et D': 1° quand D est contenu dans D'. Soient alors

$$u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$$
$$u'_0, u'_1, \ldots, u'_n, \ldots$$

nos deux suites de fonctions, formées par balayages successifs et relatives la 1ere à D, la 2de à D'. Nous pourrons supposer:

$$u_0 = u'_0$$

et en effet comme D est contenu dans D', nous pourrons supposer que le cercle C_0 qui est un élément de D, est aussi un élément de D'. Nous aurons alors à l'intérieur de C_0

$$u_0 = u'_0 > 0$$

et en dehors de C_0

$$u_0 = u'_0 = 0.$$

Si la 1ere suite est convergente, nous appellerons u sa limite et de même si la 2de suite converge, sa limite s'appellera u'. La fonction u' est harmonique dans D' et par conséquent dans D, (sauf au point O où c'est $u' - u_0$ qui est harmonique); elle est d'ailleurs positive; on démontrerait comme plus haut que l'on a $u' > u_0$, que l'on a $u' > u_{n+1}$ si $u' > u_n$, que par conséquent quel que soit n on a $u' > u_n$ et à la limite:

$$u' > u.$$

D'où cette conséquence, *si la suite des u'_n converge pour le domaine D', la suite des u_n relative à un domaine D contenu dans D' convergera a fortiori.*

2°. Quand le domaine D est multiple de D'.

Cette fois à tout point de D' correspondent plusieurs points de D; si nous reprenons nos deux séries, il faut supposer qu'aux différents points de D qui correspondent à un même point de D', la fonction u'_n reprend la même valeur, mais que la fonction u_n ne reprend pas en général la même valeur. Soit C_0 celui des éléments de D qui contient le point O; il y aura alors d'autres points $O_1, O_2, \ldots, O_p, \ldots$ qui correspondront au même point de D' que le point O; et on pourra les regarder comme appartenant à autant de cercles $C_0^1, C_0^2, \ldots, C_0^p, \ldots$ qui seront des éléments distincts de D, mais qui correspondront à un même élément de D'. Alors la fonction u'_n deviendra logarithmiquement infinie, non seulement en O, mais en $O_1, O_2, \ldots$, tandis que la fonction u_n ne deviendra infinie qu'en O.

Alors nous aurons dans le cercle C_0

$$u_0 \quad u'_0 > 0$$

dans les autres cercles C_0^1, C_0^2, etc.

$$u'_0 > 0, \qquad u_0 = 0$$

et en dehors de ces cercles

$$u_0 = u'_0 = 0.$$

Si donc la suite des u'_n converge on aura:

$$u' > u'_0 \geq u_0$$

et en raisonnant comme plus haut on trouvera:

$$u' > u_n.$$

Une observation toutefois; nous nous sommes appuyés plus haut sur ce que la différence $u' - u_{n+1}$ est harmonique à l'intérieur du cercle C_k que l'on vient de balayer; sachant de plus que cette différence est positive sur la circonférence de ce cercle, nous en avons conclu qu'elle reste positive à l'interieur de ce cercle. Ici il peut se faire que $u' - u_{n+1}$ devienne infinie, puisque u' devient infinie aux points O_p différents de O, tandis que u_{n+1} reste finie, mais alors cette différence tend vers $+\infty$ et non pas vers $-\infty$ de sorte que la conclusion subsiste.

On aura donc à la limite

$$u' > u.$$

Si donc la serie converge pour un domaine D' elle convergera a fortiori pour un domaine D multiple de D'.

3° quand enfin à tout point de D correspond un point de D' et un seul, tandis qu'à un point de D' peuvent correspondre soit zéro, soit un, soit plusieurs points de D.

Dans ce cas il existe un domaine intermédiaire D'' tel que D soit multiple de D'' et D'' contenu dans D'.

Si alors la serie converge pour D', elle convergera pour D'', et par conséquent pour D.

On voit que la démonstration du mémoire cité (Bull. Soc. Math.) a été simplifiée par l'application de la méthode du balayage et surtout par celle du théorème de Harnack, qui permet de supprimer toutes les discussions relatives à l'uniformité de la convergence.

§ 4. Introduction de la fonction auxiliaire majorante.

Considérons un système de fonctions

$$y_1, y_2, \ldots, y_p \tag{1}$$

et soit D le domaine principal de ce système; soit D_1 le domaine principal de l'une des fonctions y_1; d'après ce que nous avons vu plus haut, à chaque point de D correspond toujours un point de D_1 et un seul; mais à un point de D_1 peuvent correspondre zéro, un ou plusieurs points de D. Il existe donc un domaine intermediaire D'_1, contenu dans D_1 et dont D est multiple, et il en résulte comme nous venons de le voir, que si la série converge pour D_1, elle convergera également pour D, et la fonction de Green existera pour D.

Soit maintenant D' un domaine secondaire de notre système de fonctions, il sera multiple de D de sorte que la fonction de Green existera également pour D'.

Cela posé il y a des fonctions y_1 pour le domaine principal desquelles la fonction de Green existe certainement. Considérons en effet une fonction fuchsienne quelconque

$$x = f(z)$$

n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental, de centre O et de rayon 1. Résolvons l'équation $x = f(z)$ par rapport à z et soit

$$z = \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ sera une fonction multiforme dont on peut former le domaine principal D_1 Considérons sur ce domaine D_1 la fonction

$$t = \log \frac{1}{|z|}$$

ce sera la fonction de Green cherchée; elle est en effet toujours positive, et toujours harmonique, sauf en un seul point du domaine D_1, celui pour lequel on a $z = 0$, et en ce point elle devient logarithmiquement infinie.

Nos fonctions u_n du § précédent sont toujours plus petites que t, et cela est vrai des fonctions u_n relatives soit au domaine D_1 lui-même, soit à tout domaine contenu dans D_1, on multiples d'un domaine contenu dans D_1. Si donc notre système (1) comprend la fonction

$$y_1 = z = \varphi(x)$$

la suite des u_n converge et la fonction de Green existe, soit pour le domaine principal D, soit pour un domaine secondaire D' quelconque de ce système (1). La fonction t joue le même rôle que celle que nous avons désignée par la mêm lettre dans le mémoire cité (Bull. Soc. Math.). Elle permet de montrer par l'inégalité

$$u_n < t$$

que la série converge sauf pour les points où t est infini. Ces points sont les points de D qui correspondent au point $z = 0$ de D_1; en général, il y en a plusieurs, l'un est le point O, les autres pourront s'appeler O_1, O_2, ...

La fonction de Green, d'après sa définition, doit devenir infinie au point O, mais rester finie en O_1, O_2 etc.; seulement le théorème de Harnack nous apprend que si la série converge en un point du domaine D, elle convergera dans tous les autres points de ce même domaine, sauf au point O. Or elle converge en tous les points où t est fini; donc elle convergera également en O_1, O_2, ... Nous sommes ainsi dispensés de la considération des fonctions t_i qui dans le mémoire cité, avaient été précisément introduites pour démontrer la convergence aux points tels que O_1, O_2, ...

Supposons maintenant que dans notre système (1) ne figure pas de fonction de cette forme, c'est à dire qui soient l'inverse d'une fonction fuchsienne. Nous formerons alors un système (1 bis), obtenu en adjoignant au système (1) une $p + 1^e$ fonction

$$y_{p+1} = z = \varphi(x)$$

qui soit l'inverse d'une fonction fuchsienne.

Soit Δ le domaine principal du système (1 bis), et Δ' un domaine secondaire de ce même système. Alors Δ' et Δ sont multiples d'un domaine δ contenu dans le domaine principal D du système (1).

Nous sommes certains alors que la fonction de Green existe pour Δ et Δ' puisque le système (1 bis) contient une fonction inverse d'une fonction fuchsienne; nous verrons que l'existence de cette fonction de Green, permet *d'uniformiser* les fonctions

$$y_1, y_2, \ldots, y_p, y_{p+1}$$

c'est à dire d'exprimer ces $p+1$ quantités en fonctions uniformes d'une même variable auxiliaire ζ; mais une difficulté peut se présenter; le champ dans lequel cette uniformisation sera réalisée, comprendra tous les points pour lesquels les $p+1$ fonctions existent, c'est à dire tous les points qui ont un correspondant dans Δ, c'est à dire tous les points de δ. Elle ne le sera pas pour tous les points pour lesquelles les p premières fonctions *données* existent (abstraction faite de la $p+1^e$ fonction arbitrairement adjointe) c'est à dire pour tous les points de D, si δ est plus petit que D. La solution pourrait donc paraître imparfaite et c'est ce qui me conduit à la discussion suivante.

On peut faire plusieurs hypothèses au sujet de la fonction fuchsienne dont l'inverse est y_{p+1}.

1°. Nous pouvons supposer que le polygone générateur de cette fonction fuchsienne a des sommets sur le cercle fondamental, c'est à dire qu'il est de la 2e ou de la 6e familles. C'est ce qui arrive par exemple si l'on choisit pour cette onction fuchsienne la fonction modulaire comme je l'ai fait dans le mémoire cité. On sait que cette fonction ne peut prendre aucune des valeurs 0, 1, ∞ de sorte que la fonction inverse

$$y_{p+1} = \varphi(x)$$

n'existe pas pour $x=0$, $x=1$, $x=\infty$; si donc il y a dans le domaine D des points pour lesquels x prend l'une de ces 3 valeurs, ces points doivent être exclus du domaine δ; ce sont des Ausnahmsstellen.

2°. Nous pouvons supposer que le polygone générateur est tout entier à l'intérieur du cercle fondamental, c'est à dire que la fonction fuchsienne est de la 1ere famille. Dans ce cas, cette fonction peut prendre toutes les valeurs possibles; la fonction inverse

$$y_{p+1} = \varphi(x)$$

existe pour toutes les valeurs de x. Il arrivera toutefois que cette fonction présentera des points de ramification algébrique. Si nous nous placions au point de vue que nous avions d'abord adopté, c'est à dire si nous ne voulions composer nos domaines que d'éléments holomorphes ou polaires, ces points de ramification seraient en dehors du domaine principal de cette fonction y_{p+1}; il en sera plus de même si au contraire nous admettons les éléments algébriques; à tout point de D correspondra un point du domaine de y_{p+1} et par conséquent un point de Δ. Les domaines δ et D seront identiques; Δ et Δ' seront multiples de D et il n'y aura plus d'Ausnahmsstellen.

Mais il y a quelque chose de plus; soient Δ et D deux domaines quelconques et supposons que Δ soit multiple de D. Nous dirons que Δ est *régulièrement*

multiple de D, s'il satisfait à la condition suivante. Soit M un point de D; soient

$$M_1, \; M_2, \; \ldots$$

les points correspondants de Δ. Soit M' un autre point de D infiniment voisin de M; nous supposerons que parmi les points de Δ qui correspondent à M', il y en ait un qui soit infiniment voisin de M_1, un qui soit infiniment voisin de M_2, ...

Si cette condition est remplie, c'est à dire si Δ est régulièrement multiple de D, il est clair que, si à un certain point M de D correspondent un nombre *fini* n de points de Δ, alors à tout autre point de D correspondront le *même* nombre fini n de points de Δ.

Revenons maintenant aux domaines principaux Δ et D des systèmes (1 bis) et (1). Je dis que Δ est *régulièrement* multiple de D (si l'on admet des éléments algébriques, et si la fonction fuchsienne auxiliaire est de la 1ere famille.) Soit en effet M un point du domaine D, et x la valeur correspondante de cette variable. Pour cette valeur x, la fonction y_{p+1} existe et peut prendre une infinité de valeurs

$$\alpha_1, \; \alpha_2, \; \ldots, \; \alpha_q, \; \ldots$$

qui se déduisent de l'une d'entre elles, α_1 par exemple, en appliquant à cette quantité α_1 les diverses substitutions linéaires du groupe fuchsien qui engendre la fonction fuchsienne auxiliaire.

Au point M de D, correspondront une infinité de points de Δ, qui j'appellerai

$$(M, \alpha_1), \; (M, \alpha_2), \; \ldots, \; (M, \alpha_q), \; \ldots$$

et qui correspondront aux différentes valeurs de la fonction y_{p+1}.

Soit maintenant M' un autre point de D, infiniment voisin de M; soit $x + \varepsilon$ la valeur correspondante de x, et

$$\beta_1, \; \beta_2, \; \ldots, \; \beta_q, \; \ldots$$

les déterminations correspondantes de y_{p+1}. Au point M' de D correspondront une infinité de points de Δ qui sont:

$$(M', \beta_1), \; (M', \beta_2), \; \ldots, \; (M', \beta_q), \; \ldots$$

Ce qu'il s'agit de démontrer, c'est que parmi ces points il y en a un qui diffère infiniment peu de (M, α_q), et comme M' diffère très peu de M par hypothèse, il suffit d'établir que parmi les déterminations de $\varphi(x + \varepsilon)$, il y en a une, β_q par exemple, qui diffère infiniment peu de la détermination α_q de $\varphi(x)$. Or cela paraîtra évident pour peu qu'on réfléchisse aux propriétés des fonctions fuchsiennes de la 1ere famille.

Soit maintenant D un domaine quelconque; je dis que nous pourrons trouver un domaine Δ, régulièrement multiple de D et simplement connexe. Soit en effet C_0 l'élément initial de D, C un élément quelconque, M un point intérieur à C, M_0 un point intérieur à C_0. On peut aller sur le domaine D de M_0 en M par plusieurs chemins; envisageons deux de ces chemins; ils pourront être *équivalents*, c'est à dire qu'ils pourront limiter une aire continue située sur D; mais ils pourront aussi ne pas l'être, à moins que D ne soit simplement connexe.

Cela posé, définissons le domaine Δ; un point de ce domaine sera caractérisé par le point M de D qui lui correspond, et par le chemin par lequel on est venu de M_0 en M; pour que deux points de Δ ainsi caractérisés soient identiques, il faudra et il suffira qu'ils correspondent à un même point M de D et qu'on soit venu de M_0 en M par deux chemins équivalents. Il est clair que Δ est simplement connexe, je dis qu'il est régulièrement multiple de D. Soit en effet M un point de D, appartenant à un élément C, M_0NM, $M_0N'M$, deux chemins allant de M_0 à M et que je supposerai *équivalents*. Ainsi se trouvera défini un point de Δ que j'appellerai (M, M_0NM). Ce qu'il s'agit de démontrer, c'est que si M' est un point de D, très voisin de M, il y aura sur Δ un point très voisin de (M, M_0NM) et qui correspondra à M'. Et en effet, M' étant très voisin de M, pourra être joint à M par un arc MM' très petit; en l'adjoignant au chemin M_0NM, on obtiendra un chemin M_0NMM' qui en différera très peu; et alors le point (M', M_0NMM') est un point de Δ qui correspond à M' et qui est très voisin de (M, M_0NM), . . . C. Q. F. D. Ce qui justifie ce résultat, c'est que si deux chemins M_0NM et $M_0N'M$ sont équivalents, il en est de même des deux chemins M_0NMM' et $M_0N'MM'$.

En résumé, étant donné un système (1) *quelconque de fonctions multiformes, et D le domaine principal de ce système, on peut toujours former un domaine régulièrement multiple de D, simplement connexe, et pour lequel la fonction de Green existe.*

Et en effet, formons une fonction $y_{p+1} = \varphi(x)$, inverse d'une fonction fuchsienne de la 1ère famille; adjoignons-la au système (1) de façon à former le système (1 bis); le domaine principal Δ de ce système sera régulièrement multiple de D, à la condition que nous admettions des éléments algébriques. De plus Δ sera multiple d'un domaine contenu dans le domaine principal de y_{p+1} et comme la fonction de Green existe pour ce dernier domaine, elle existera a fortiori pour Δ. Nous avons vu en effet que la présence d'éléments algébriques n'empêche pas l'application de la méthode du balayage.

Nous pouvons ensuite construire un domaine Δ', régulièrement multiple de Δ et simplement connexe. Etant régulièrement multiple de Δ, il le sera de D. De plus la fonction de Green existant pour Δ, existera a fortiori pour Δ'.

§ 5. Les fonctions v et z.

Soit un domaine D quelconque, admettant une fonction de GREEN.

Nous allons maintenant comme dans le mémoire cité, définir les fonctions v et v_n. Nous avons défini déjà les fonctions u et u_n; si $x = \xi + i\eta$ est la variable complexe envisagée, nous aurons:

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{d^2 u}{d\eta^2} = 0$$

$$\Delta u_n = \frac{d^2 u_n}{d\xi^2} + \frac{d^2 u_n}{d\eta^2} = 0.$$

Les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dv}{d\xi} = -\dfrac{du}{d\eta}, \quad \dfrac{du}{d\xi} = \dfrac{dv}{d\eta} \\[2ex] \dfrac{dv_n}{d\xi} = -\dfrac{du_n}{d\eta}, \quad \dfrac{du_n}{d\xi} = \dfrac{dv_n}{d\eta} \end{array} \right.$$

sont donc compatibles et peuvent servir à définir v et v_n. On achève de définir ces fonctions en leur imposant la condition de s'annuler en un point A différent de O; et alors nous aurons

$$(2) \qquad v = \int_A \left(\frac{du}{d\xi} d\eta - \frac{du}{d\eta} d\xi\right), \quad v_n = \int_A \left(\frac{du_n}{d\xi} d\eta - \frac{du_n}{d\eta} d\xi\right).$$

On voit tout de suite que les suites $\frac{du_n}{d\xi}, \frac{du_n}{d\eta}$ convergeant uniformément (en vertu du théorème de HARNACK) et ayant pour limites $\frac{du}{d\xi}, \frac{du}{d\eta}$, la suite v_n convergera uniformément et aura pour limite v; nous reviendrons plus loin sur ce résultat pour le préciser. Posons ensuite, toujours comme dans le mémoire cité:

$$z = e^{-(u+iv)}, \quad z_n = e^{-(u_n + i v_n)}$$

il est clair que la suite z_n a pour limite z. Le point essentiel, c'est que la fonction z est uniforme sur le domaine D quand ce domaine est simplement connexe.

En effet revenons aux intégrales (2) qui définissent v, ces intégrales peuvent admettre deux sortes de périodes: 1° une période polaire, relative au point O qui est un infini pour les fonctions sous le signe $\int$. Cette période est égale à 2π. et 2°, si D n'est pas simplement connexe, des périodes cycliques relatives aux chemins d'intégration qui seraient fermés sans être équivalents à zéro. Si D est

simplement connexe, ces dernières périodes n'existent pas, de sorte que v n'admet que la période 2π; mais quand v augmente de 2π, z ne change pas. Cette fonction est donc uniforme.

C. Q. F. D.

Mais il y a lieu d'examiner de plus près la formation de ces fonctions v_n et z_n. Soit d'abord C_0 l'élément initial, celui qui contient le point O. Nous aurons à l'extérieur de C_0: $z_0 = 1$ et à l'intérieur de C_0

$$z_0 = \frac{x-a}{x-a'}\frac{X-a'}{X-a}$$

expression dont je vais expliquer la signification: x est la variable indépendante, c'est l'affixe du point M de coordonnées courantes ξ et η; a est l'affixe du point O, a' celle du point O' inverse de O par rapport au cercle C_0, de telle sorte que l'équation de la circonférence de C_0 soit:

$$\left|\frac{x-a}{x-a'}\right| = \text{const.}$$

X sera l'affixe d'un point quelconque de cette circonférence, il en résulte que la fonction z_0 n'est pas entièrement définie, puisque nous pouvons choisir arbitrairement X sur cette circonférence; z_0 n'est définie qu'à un facteur constant près de module un.

Ayant ainsi défini z_0, voyons comment les balayages successifs vont nous permettre de passer de z_n à z_{n+1}. Nous remarquerons que les fonctions z_n peuvent présenter des discontinuités le long des lignes L, c'est à dire le long des circonférences des différents éléments; voyons quelle est la nature de ces discontinuités. D'abord u_n est continu; il en résulte que quand on franchit une des lignes de discontinuité, le module de z_n ne change pas, mais il n'en est pas de même de son argument $-v_n$. Les dérivées de u_n sont au contraire discontinues. Soit ds un élément de l'arc d'une des lignes L, $d\nu$ un élément normal à cette ligne; soient

$$\frac{du_n^0}{ds}, \quad \frac{du_n^0}{d\nu}, \quad \frac{du_n^1}{ds}, \quad \frac{du_n^1}{d\nu}$$

les dérivées de u_n prises le long de L, ou le long de la normale à L; l'exposant 0 correspondant à l'un des côtés de la ligne L, l'exposant 1 à l'autre côté. De même pour les dérivées de v_n. On aura:

$$\frac{du_n^0}{ds} = \frac{du_n^1}{ds}, \quad \frac{du_n^0}{d\nu} = \frac{du_n^1}{d\nu} + 2\pi m'$$

en désignant par dm ce que nous avons appelé la masse génératrice située sur ds, et en posant $m' = \frac{dm}{ds}$ de façon que m' représente la densité de cette matière génératrice. D'autre part les équations (1) nous donnent:

$$\frac{du_n}{ds} = -\frac{dv_n}{d\nu}; \quad \frac{du_n}{d\nu} = \frac{dv_n}{ds}$$

et on en conclut:

$$(3) \qquad \frac{dv_n^0}{d\nu} = \frac{dv_n^1}{d\nu}, \quad \frac{dv_n^0}{ds} = \frac{dv_n^1}{ds} + 2\pi m'.$$

Cela posé, supposons que pour passer de z_n à z_{n+1} on veuille balayer un certain élément C_k, et je supposerai d'abord qu'il s'agisse d'un élément holomorphe ou polaire. A l'extérieur de C_k nous aurons:

$$z_{n+1} = z_n$$

et à l'intérieur de C_k:

$$(4) \qquad \log \frac{z_{n+1}}{z_n} = \int \log \frac{(x-\alpha)(A-\alpha')}{(x-\alpha')(A-\alpha)} dm'.$$

Dans cette expression, x est la variable indépendante; α est l'affixe d'un point d'une ligne de discontinuité L situé à l'intérieur de C_k; α' est l'affixe du point inverse de α par rapport à C_k, de telle façon que la circonférence de C_k ait pour équation

$$\left|\frac{x-\alpha}{x-\alpha'}\right| = \text{const.}$$

A est l'affixe d'un point quelconque de la circonférence de C_k, choisi arbitrairement, mais une fois pour toutes; dm' est la masse génératrice située sur l'arc infiniment petit ds de la ligne L, arc dont le centre de gravité est α. Enfin l'intégration doit être étendue à toutes les lignes de discontinuité intérieures à C_k. A cause des équations (3) nous pouvons encore écrire:

$$(4 \text{ bis}) \qquad \log \frac{z_{n+1}}{z_n} = \int \log \frac{(x-\alpha)(A-\alpha')}{(x-\alpha')(A-\alpha)} d\left(\frac{v_n^0 - v_n^1}{2\pi}\right)$$

v_n^0 et v_n^1 étant les valeurs de la fonction v_n de part et d'autre de la ligne de discontinuité et dans le voisinage du point α de cette ligne.

Si C_k est un élément *infini*, c'est à dire comprenant la partie du plan *extérieure* à la circonférence de C_k, nous aurons en dehors de l'élément C_k; $y_{n+1} = z_n$, et dans l'élément C_k, qui est tout entier à l'extérieur de la circonférence de C_k:

(4 ter) $$\log \frac{z_{n+1}}{z_n} = \int \log \frac{(x-\alpha)(A-\alpha')}{(x-\alpha')(A-\alpha)} d\left(\frac{v_n^1 - v_n^0}{2\pi}\right)$$

Si enfin C_k est un élément algébrique et si C_k est un cercle p^{ple}, on aura à l'extérieur de C_k: $z_{n+1} = z_n$ et à l'intérieur de C_k:

(4 quater) $$\log \frac{z_{n+1}}{z_n} = \int \log \frac{\left(\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{\alpha}\right)\left(\sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{\alpha'}\right)}{\left(\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{\alpha'}\right)\left(\sqrt[p]{A} - \sqrt[p]{\alpha}\right)} d\left(\frac{v_n^0 - v_n^1}{2\pi}\right)$$

On voit qu'à cause des points A qui peuvent être arbitrairement choisis sur la circonférence de l'élément C_k, les fonctions z_n successives ne sont définies qu'à un facteur constant près de module 1; et encore ce facteur n'est constant que si l'on ne franchit pas une des lignes de discontinuité, mais il peut varier brusquement quand on franchit ces lignes.

Supposons un chemin ne franchissant et ne touchant aucune de ces lignes de discontinuité, c'est à dire aucune des circonférences des différents éléments, et envisageons l'intégrale:

$$\int dv_n = \int \left(\frac{du_n}{d\xi} d\eta - \frac{du_n}{d\eta} d\xi\right)$$

prise le long d'un de ces chemins. Puisque le chemin n'a aucun point commun avec aucune des lignes de discontinuité, on peut construire une aire où il n'y aura aucune ligne de discontinuité et qui contiendra notre chemin. Dans cette aire toutes les fonctions u_n sont harmoniques et on peut leur appliquer le théorème de Harnack; donc la suite des $\frac{du_n}{d\xi}$ et celle des $\frac{du_n}{d\eta}$ convergent uniformément, de sorte que $\int dv_n$ tend vers $\int dv$.

Si nous supposons maintenant que notre chemin, tout entier contenu à l'intérieur d'un élément C_k, coupe une ligne de discontinuité L; le même raisonnement n'est plus immédiatement applicable. Et en effet les fonctions u_n sont bien toutes positives, croissent avec n; de plus elles sont harmoniques dans l'aire envisagée, si l'on donne à n certaines valeurs en nombre infini, à savoir celles qui correspondent aux balayages successifs de l'élément C_k, parce qu'après chacun de ces balayages, il n'y a plus de masses génératrices dans C_k. Donc par le théorème de Harnack le suite des u_n et celle des $\frac{du_n}{d\xi}$ convergent uniformément pourvu qu'on ne donne à n que ces valeurs particulières. Mais comme u_n croît avec n, nous pouvons en conclure que la suite des u_n convergera encore uniformément pour toutes les valeurs entières de n; seulement la même conclusion

ne s'impose pas en ce qui concerne les dérivées $\frac{du_n}{d\xi}$, qui ne vont pas nécessaire- en croissant avec n. Décomposons notre chemin en deux parties séparées l'une de l'autre par le point d'intersection P du chemin et de la ligne L. Il suffirait de démontrer le théorème pour ces deux parties. Soit PM l'une de ces parties; si nous pouvions assigner aux dérivées de u_n une limite supérieure λ, même au point P, le théorème serait démontré. En effet, nous voulons démontrer que l'on peut prendre n assez grand pour que

$$\int_{PM} (dv - dv_n) < \varepsilon$$

quel que soit ε.

Pour cela nous diviserons PM en deux parties $PN + NM$; si s est la longueur de l'arc PN, et λ la limite supérieure dont nous venons de parler, nous aurons

$$\int_{PM} (dv - dv_n) < s\lambda$$

et nous pourrons prendre N assez près de P pour que $s\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$, et le point N une fois choisi, comme NM ne va plus jusqu'à la ligne L, nous pourrions prendre n assez grand pour que

$$\int_{NM} (dv - dv_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nous sommes donc conduits à chercher cette limite supérieure λ et pour cela à étudier la façon dont les masses se distribuent sur les lignes L. Soit une masse m située á l'intérieur d'un cercle C_k, en A; soit B un point de la circonférence C_k, et R le rayon de cette circonférence, et O son centre. Balayons le cercle C_k, cette masse m va se répartir sur toute la circonférence C_k; soit δ la densité de la matière ainsi répartie dans le voisinage de B. On voit que $\frac{\delta}{m}$ est une fonction des trois distances OA, OB, AB, et que cette fonction ne devient infinie que pour $AB = 0$. Si le point A décrit une ligne de discontinuité L intérieure à C_k, et si B est un point fixe de la circonférence C_k non situé sur L, nous pourrons donc assigner une limite supérieure à $\frac{\delta}{m}$.

Supposons donc que B soit un point d'une circonférence C_k, mais ne soit pas à l'intersection de C_k avec une autre ligne de discontinuité; je me propose de chercher une limite supérieure de la densité de la matière attirante en ce

point. Cette densité ne peut varier que dans deux cas: 1° quand on balaye C_k. 2° quand on balaye l'un des éléments dont fait partie B. Dans le 2ᵈ cas cette densité devient nulle. Dans le 1ᵉʳ cas une masse négative au plus égale à 1 en valeur absolue est répartie en différents points A de C_k; on la balaye vers la circonférence de C_k; les points A sont sur les lignes de discontinuité intérieures à C_k, et comme le point B n'est pas sur une de ces lignes, nous pouvons assigner une limite supérieure à la distance AB, et par conséquent d'après ce qui précède au rapport $\frac{\delta}{m}$, de l'accroissement δ de densité au point B, par suite du balayage d'une masse m située en A, à cette masse m. Nous avons ainsi une limite superieure de $\frac{\Sigma\delta}{\Sigma m}$, et comme Σm est au plus égale à 1, nous avons une limite H de $\Sigma\delta$, c'est à dire de l'accroissement total de la densité en B par suite du balayage de C_k. *Si nous supposons qu'entre deux balayages consécutifs de C_k, on balaye toujours l'un des éléments dont fait partie B*, nous voyons qu'avant chaque balayage de C_k, la densité en B est nulle; après ce balayage elle prend une valeur inférieure à H, (limite de $\Sigma\delta$) et la conserve jusqu'à ce qu'on balaye un des éléments dont fait partie B, elle redevient alors nulle. *La densité au point B est donc limitée.*

Je dis maintenant que les dérivées $\frac{du_n}{d\xi}$, $\frac{du_n}{d\eta}$ sont limitées au point B. Décrivons en effet autour du point B un petit cercle K. Soit φ_n le potentiel logarithmique dû à l'attraction des masses situées à l'intérieur de K et qui sont toutes sur la circonférence de C_k; les densités étant limitées, φ_n et ses dérivées seront limitées; la fonction u_n qui est plus petite que u est limitée. La différence $u_n - \varphi_n$ est donc limitée à l'intérieur de K et sur la circonférence; de plus cette différence $u_n - \varphi_n$ est harmonique à l'intérieur de K; nous pouvons donc par l'application du théorème de Harnack, trouver une limite supérieure des dérivées de $u_n - \varphi_n$, et par conséquent de celles de u_n, puisque celles de φ_n sont limitées.

C. Q. F. D.

Ce qui précède ne s'appliquerait pas à un point B qui serait à l'intersection de deux lignes de discontinuité; ou verrait en effet qu'en un pareil point, la densité pourrait devenir logarithmiquement infinie, (je veux dire que la densité en un point B' de C_k, très voisin de B est de l'ordre de logarithme de la distance BB'.) Il en est de même pour les dérivées de u_n. Au contraire la fonction u_n elle-même, toujours plus petite que u, reste finie.

Mais nous pouvons toujours éviter de faire passer nos chemins d'intégration par ces points d'intersections des lignes de discontinuité. Le résultat resterait le

même d'ailleurs si on les y faisait passer, car bien que $\frac{du_n}{d\xi}$ devienne logarithmiquement infinie, l'intégrale $\int \frac{du_n}{d\xi} d\eta$ resterait finie. Il résulte de là que l'intégrale

$$\int (dv - dv_n)$$

prise le long d'un chemin quelconque tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

On a vu que les fonctions z_n ne sont définies qu'à un facteur constant près de module 1 qui peut varier brusquement quand on franchit une des lignes L, ou ce qui revient au même que les fonctions v_n ne sont définies qu'à une constante près qui varie brusquement quand on franchit une des lignes L. Les fonctions v_n outre les variations continues:

$$\frac{du_n}{d\xi} d\eta - \frac{du_n}{d\eta} d\xi$$

qu'elles subissent quand on décrit un chemin quelconque, subissent donc des variations brusques quand on franchit une ligne L.

On peut pour achever de définir les v_n, convenir que ces variations brusques en certains points de certaines lignes L, doivent être nulles. Mais ces variations ne peuvent être nulles partout. Envisageons en effet les intégrales

$$\int dv, \quad \int dv_n$$

prises le long d'un chemin fermé quelconque. Elles sont égales à 2π multiplié par la somme des masses intérieures au contour d'intégration. Pour v, il ne peut y avoir que la masse $+1$ située au point O; pour v_n il peut y avoir en outre des masses négatives sur les lignes L. Si donc le contour enveloppe le point O, la 1ere intégrale sera égale à 2π et la 2de généralement plus petite que 2π; si le contour n'enveloppe pas le point O, la 1ere intégrale sera égale à 0 et la 2de généralement négative.

§ 6. Les fonctions $u_{p.n}$.

Nous avons dit que la fonction u obtenue était indépendante de l'ordre des balayages; mais nous avons jusqu'ici supposé que ceux-ci étaient dirigés de telle façon que l'on pouvait trouver une fonction u_n *dont l'indice n est un entier fini* et pour laquelle un élément quelconque aurait été balayé un nombre de fois aussi grand qu'on le veut. Nous considérions alors la série

$$u = u_0 + (u_1 - u_0) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) + \cdots$$

comme une série ordinaire; nous pouvons aussi la traiter comme une série à double entrée.

Supposons une suite de fonctions *à deux indices* u_{np}. La 1ère u_{00} sera celle que nous appelions jusqu'ici u_0; $u_{0.n+1}$ se déduira de $u_{0.n}$ par le balayage d'un certain élément C_k; u_{10} sera la limite de $u_{0.n}$ pour $n = \infty$; $u_{1.n+1}$ se déduira de $u_{1.n}$ par un balayage; u_{20} sera la limite de $u_{1.n}$ pour $n = \infty$; et ainsi de suite; $u_{p.n+1}$ se déduira de $u_{p.n}$ par un balayage, et $u_{p+1.0}$ sera la limite de $u_{p.n}$ pour $n = \infty$. Il est clair que l'on aura:

$$u_{p+1.m} > u_{p+1.0} > u_{p.n+1} > u_{p.n} > u_{p.0} > \cdots > u_{00} > 0,$$

On verrait comme plus haut que

$$u > u_{p.n}$$

ce qui montrerait que la suite des $u_{p.n}$ quand n puis p tendent vers l'∞ a une limite $\leq u$; et comme cette limite est une fonction harmonique en vertu du théorème de Harnack, elle est plus grande que les u_n que nous avions envisagés dans les § précédents. Elle est donc $\geq u$; elle est donc égale à u; c'est toujours le raisonnement de la fin du § 3 qui s'applique sans changement.

Nous pouvons par exemple, considérer une série de domaines

$$d_0,\ d_1,\ d_2,\ \ldots$$

contenus dans notre domaine D, et tels que chacun d'eux soit contenu dans le suivant. De plus chacun d'eux sera formé d'un nombre fini d'éléments de D. Alors nous supposerons que les balayages qui font passer de u_{0n} à u_{0n+1} ne portent que sur les éléments de d_0 et de telle façon que chacun d'eux soit balayé une infinité de fois; que les balayages qui font passer de $u_{1.n}$ à $u_{1.n+1}$ ne portent que sur les éléments de d_1 et cela de telle façon que chacun d'eux soit balayé une infinité de fois; et ainsi de suite.

Dans ces conditions, il est clair que $u_{1.0}$ est harmonique dans tout le domaine d_0, et nul (de même que toutes les fonctions $u_{0.n}$) en dehors de ce domaine et sur ses frontières; que $u_{2.0}$ est harmonique dans tout le domaine d_1 et nul (de même que toutes les fonctions $u_{1.n}$) en dehors de ce domaine d_1 et sur ses frontières et ainsi de suite.

Toutes les conclusions des § précédents s'appliquent sans changement; on peut définir les fonctions v_{np} et z_{np} à l'aide des u_{np} comme on a défini les v_n et les z_n à l'aide des u_n. On pourrait seulement se demander si l'on peut encore comme au § précédent limiter la densité des masses génératrices en un point B, et si les conséquences déduites de cette limitation subsistent. Il faut pour cela,

comme nous l'avons dit, que (si B est sur la circonférence de C_k) entre deux balayages consécutifs de C_k, on balaye toujours l'un des éléments dont fait partie B. Il est clair qu'on peut remplir cette condition pour les fonctions u_{0n} si B est à l'intérieur du domaine d_0 et *non pas sur sa frontière;* pour les fonctions $u_{1.n}$ si B est à l'intérieur du domaine d_1 et non par sur sa frontière, et ainsi de suite. Quelle que soit donc la position de B, on pourra prendre p assez grand, pour que la condition ne cesse plus d'être remplie à partir du moment où on aura formé la fonction $u_{p.1}$. Nous pouvons donc raisonner comme au § précédent et conclure que

$$\int (dv - dv_{p\,n})$$

prise le long. d'un chemin quelconque, tend vers zéro, quand on fait tendre n puis p vers l'infini.

Dans le mémoire cité (Bull. Soc. Math.) nous avons envisagé seulement les fonctions

$$u_{1.0},\ u_{2.0},\ \ldots,\ u_{p.0}\ \ldots$$

qui sont les fonctions de Green relatives aux domaines successifs

$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_p\ \ldots$$

Nous y trouvions l'avantage que la fonction $u_{p.0}$ est harmonique à l'intérieur du domaine d_p, de sorte que la fonction $z_{p.0}$ est uniforme et continue dans le domaine d_p, (ce qui n'arrive pas pour les fonctions z_n susceptibles comme nous l'avons vu de variations brusques.) Nous évitions ainsi en partie la discussion du § précédent; j'ai cru pourtant que cette discussion était par elle-même instructive et je n'ai pas voulu pour cette raison me servir ici du même artifice.

§ 7. Propriétés de la fonction z.

Faisons maintenant varier la position du point O; et amenons-le en O'; (le sens de cette notation O' n'est donc plus le même qu'au § 3; O et O' désignent simplement deux points quelconques du domaine D.) On peut former deux fonctions de Green u et u' devenant logarithmiquement infinies, l'une en O, l'autre en O', et ce sont ces deux fonctions que je me propose de comparer.

Nous pourrons diriger les balayages soit comme au § 3, soit comme au § 6; nous aurons dans le premier cas une suite de fonctions u_n, dans le second cas une suite de fonctions à double indice $u_{p\,n}$; mais ces deux suites ont même limite. Nous désignerons par u'_n, $u'_{p\,n}$, v'_n, $v'_{p\,n}$, z'_n, $z'_{p\,n}$, les fonctions qui sont à u' ce que u_n, $u_{p\,n}$, v_n, $v_{p\,n}$, z_n, $z_{p\,n}$ sont à u.

Considérons en particulier les fonctions $z_{p.0}$, $z'_{p.0}$; soit a_p la valeur de $z_{p.0}$ en O' et a'_p celle de $z'_{p.0}$ en O. Je dis que $z_{p.0}$ ne pourra prendre qu'une seule fois la valeur a_p; prenons en effet l'intégrale:

$$(1) \qquad \int \frac{dz_{p.0}}{z_{p.0} - a_p}$$

le long de la frontière du domaine d_{p-1}; elle est égale à $2i\pi$; en effet quand nous ferons le tour de cette frontière, le point $z_{p.0}$ décrira un cercle de rayon 1 puisque $u_{p.0}$ est nul sur toute cette frontière, et il le décrira une fois et une seule. En effet $\int dv_{p.0}$ est égal à 2π, puisqu'en ce qui concerne cette fonction $u_{p.0}$ il n'y a à l'intérieur du domaine d_{p-1} d'autre masse génératrice qu'une masse $+1$ au point O. Le point a_p est d'ailleurs à l'intérieur du cercle de rayon 1 décrit par le point $z_{p.0}$; l'intégrale (1) est égale à $2i\pi$. Or cette intégrale est égale à $2i\pi$ multipliée par le nombre de fois que la fonction $z_{p.0}$ prend la valeur a_p à l'intérieur de d_{p-1}. Donc la fonction ne prend qu'une seule fois cette valeur.

C. Q. F. D.

Cette démonstration ne peut donner lieu ici à aucune objection, car le domaine d_{p-1} se composant d'un nombre fini d'éléments, sa frontière se compose d'un nombre fini d'arcs de cercle; la fonction $u_{p.0}$ peut être ainsi définie, comme l'a montré M. Schwarz, à l'aide d'une équation différentielle linéaire à coëfficients rationnels, de la même façon que les fonctions fuchsiennes. On pourrait d'ailleurs appliquer l'un quelconque des procédés pour la démonstration complète du principe de Derichlet quand la frontière du domaine envisagé est formée de lignes analytiques, ou plus généralement quand elle a un rayon de courbure déterminé. (Cf. loco cit. American Journal pages 227, 228, 229.) Il n'y aurait rien à y changer.

Nous sommes donc certains que $u_{p.0}$ tend bien vers 0 quand on se rapproche indéfiniment de la frontière de d_{p-1}; et on peut appliquer les résultats obtenus plus haut, non seulement à l'intérieur, mais à la frontière de d_{p-1}. On démontrerait de la même manière que $z'_{p.0}$ ne peut prendre qu'une seule fois la valeur a'_p.

Cela posé soient ρ_p et φ_p le module et l'argument de a_p, envisageons le rapport:

$$R = z'_{p.0} \frac{\rho_p z_{p.0} - e^{i\varphi_p}}{z_{p.0} - \rho_p e^{i\varphi_p}}.$$

Je dis que ce rapport ne peut, à l'intérieur de d_{p-1}, devenir ni nul, ni infini; en effet $z'_{p.0}$ et $z_{p.0}$ étant finis à l'intérieur de ce domaine, R ne pourrait devenir nul ou infini, que si l'on avait:

1° ou bien $z'_{p.0} = 0$ ce qui ne peut arriver qu'au point O'.

2° ou bien $\rho_p z_{p.0} - e^{i\varphi_p} = 0$, ce qui est impossible puisque $\rho_p < 1$, $|z_{p.0}| < 1$, $|e^{i\varphi_p}| = 1$.

3° ou bien $z_{p.0} - \rho_p e^{i\varphi_p} = 0$, ou $z_{p.0} = a_p$; ce qui a lieu en O' par l'hypothèse, et ne peut avoir lieu en aucun autre point par suite du théorème que nous venons de démontrer.

Il n'y aurait donc que pour le point O', et en ce point le numérateur et le dénominateur s'annulent et la fraction reste finie.

Donc $\log|R|$ est une fonction harmonique à l'intérieur de d_{p-1}.

De plus quand on décrit la frontière de d_{p-1}, on a

$$|z_{p.0}| = |z'_{p.0}| = |R| = 1$$

d'où $\log|R| = 0$; cette fonction s'annulant à la frontière du domaine et étant harmonique dans tout le domaine, doit s'annuler dans tout le domaine. Donc R est une constante dont le module est égal à 1.

Pour déterminer cette constante je donnerai aux fonctions leurs valeurs au point O, c'est à dire:

$$z'_{p.0} = a'_p, \ z_{p.0} = 0, \ R = \frac{a'_p}{\rho_p}.$$

On a donc entre $z'_{p.0}$ et $z_{p.0}$ la relation linéaire:

$$z'_{p.0} = \frac{a'_p}{\rho_p} \frac{z_{p.0} - \rho_p e^{i\varphi_p}}{\rho_p z_{p.0} - e^{i\varphi_p}}. \tag{2}$$

Soit maintenant

$$a = \rho e^{i\varphi}$$

la valeur de z au point O', et a' la valeur de z' au point O. Faisons croître p indéfiniment, $z_{p.0}$, $z'_{p.0}$, a_p, ρ_p, φ_p, a'_p tendront vers z, z', a, ρ, φ, a', et à la limite la relation (2) devient

$$z' = \frac{a'}{\rho} \frac{z - \rho e^{i\varphi}}{\rho z - e^{i\varphi}}. \tag{3}$$

Donc *les deux fonctions z et z' sont liées par une relation linéaire.* Ce n'est pas tout; z' ne peut s'annuler qu'une fois; à savoir au point O'. Donc z ne peut prendre qu'une fois la valeur a, c'est à dire la valeur qu'il prend au point O'; *et comme* O' est quelconque, *la fonction z ne peut prendre qu'une seule fois la même valeur.*

§ 8. Représentation conforme du domaine D sur un cercle.

Résumons les résultats obtenus; nous avons vu qu'il existe une fonction analytique z du domaine D, qui ne peut prendre que des valeurs de module plus petit que 1, et qui ne peut prendre chacune de ces valeurs qu'une seule fois, mais nous ne savons pas encore si elle peut prendre toutes ces valeurs. En d'autres termes, traçons dans le plan des z le cercle K, de centre O et de rayon 1. Nous aurons une représentation conforme du cercle K sur le domaine D, de telle façon qu'à tout point de D corresponde un point de K et un seul, et qu'à tout point de K ne puisse correspondre plus d'un point de D. Mais nous ne savons pas encore si à tout point de K correspond un point de D. C'est ce dernier point qu'il s'agit d'établir.

Nous serons donc amenés à distinguer dans K deux ensembles de points: 1° l'ensemble E des points de K auxquels correspond un point de D. 2° l'ensemble E_1 des points de K auxquels ne correspond aucun point de D. Je me propose de démontrer que l'ensemble E comprend tout l'intérieur de K et que l'ensemble E_1 se réduit à la circonférence de K.

Observons d'abord que autour de tout point de E on peut décrire un cercle de rayon assez petit pour que tous les points intérieurs à ce cercle appartiennent également à E, et en effet la fonction z étant analytique, à toute aire de D correspondra une aire de K. L'ensemble E ne contient donc pas de points isolés, et est contenu dans son propre dérivé E'. En revanche E' contiendra des points qui n'appartiendront pas à E et qui représenteront la *frontière* de E.

Aux différents éléments C_k de D correspondront des aires γ_k du cercle K; toutes ces aires feront partie de E. Deux de ces aires ne pourront avoir de points communs que si elles correspondent à deux éléments *contigus* de D, c'est à dire à deux éléments tels que certains points de l'un soient identiques à certains points de l'autre puisqu'à un point de K ne peut correspondre qu'un seul point de D (Cf. § 2.) Je remarque d'autre part que l'ensemble E est *simplement connexe*, je veux dire par là que si une courbe fermée fait partie de E, tous les points intérieurs à cette courbe feront également partie de E. Cela résulte de ce fait que le domaine D est lui-même simplement connexe.

Si alors tous les points d'une courbe fermée C font partie de E, c'est à dire ont leurs images sur D, l'ensemble de ces images formeront aussi une courbe fermée. D étant simplement connexe, cette courbe enfermera une aire faisant partie de D. Les images sur K des différents points de cette aire, formeront à leur tour une aire qui ne sera autre chose que l'aire limitée par C.

Si C est une circonférence de centre O, il n'y aura à l'intérieur de cette circonférence aucun point de E_1; si donc il n'y a pas de points de E_1 dont la distance à O soit égale à a, il n'y en aura pas non plus dont la distance soit plus petite que a.

Cela posé, nous allons donner de notre proposition une première démonstration fondée sur la méthode de OSGOOD.

Soit q un point quelconque de la frontière de E, soient q_1 et q_2 deux autres points de E_1 d'ailleurs quelconques. Construisons une fonction fuchsienne:

$$\varphi(w)$$

définie de la façon suivante: 1° elle ne devra prendre aucune des trois valeurs

$$q, q_1, q_2.$$

2° le polygone générateur aura tous ses sommets sur le cercle fondamental (c'est à dire qu'il sera de la 3ᵉ famille); ce sera un quadrilatère dont les côtés seront conjugués deux à deux, de façon que deux côtés conjuguées soient adjacents (c'est à dire qu'il sera de genre 0); quant w se rapprochera de l'un des quatre sommets, $\varphi(w)$ tendra vers respectivement q, q_1, q_2 ou q_1, (de sorte que notre fonction $\varphi(w)$ sera liée à la fonction modulaire par une relation linéaire simple.)

3° de plus on aura

$$\varphi(0) = 0.$$

Posons alors:

$$z = \varphi(w)$$

on voit que w est une fonction multiforme de z et qui ne peut prendre que des valeurs dont le module est plus petit que 1. Quand z tend vers q le module de toutes les déterminations de w tend vers l'unité, je précise: si parmi toutes les déterminations de w, celle dont le module est le plus petit est w_0, le module $|w_0|$ est plus grand qu'une fonction $\theta(|z-q|)$ qui tend vers l'unité quand $|z-q|$ tend vers zéro.

J'observe de plus qu'*à l'intérieur de* $\boldsymbol{E}$ la fonction w peut être regardée comme uniforme. En effet, cet ensemble $\boldsymbol{E}$ étant simplement connexe, une courbe fermée tracée sur E ne peut contenir à son intérieur que des points de E; elle ne peut donc contenir aucun des 3 points singuliers q, q_1, q_2. Nous choisirons la détermination de w qui s'annule pour $z=0$.

Posons alors

$$t = \log\left|\frac{1}{w}\right|$$

cette fonction t sera harmonique dans E sauf en O où elle devient logarithmiquement infinie; de plus elle est toujours positive.

Comparons-la à une des fonctions u_n; ces fonctions, harmoniques dans D, le seront aussi sur K, puisque la représentation de D sur K est conforme. Il n'y aura d'exception que pour le point O où ces fonctions deviendront logarithmiquement infinies et pour les lignes correspondant aux lignes de discontinuité L des § précédents et qui en sont l'image sur K; dans le voisinage de ces lignes que nous appellerons l, les fonctions u_n se comportent comme des potentiels logarithmiques engendrés par des masses *négatives* répandues sur ces lignes.

La différence $t - u_n$ sera donc une fonction harmonique, (même au point O) sauf sur les lignes l où elle se comportera comme un potentiel logarithmique engendré par des masses *positives* répandues sur ces lignes; elle pourra donc avoir des *maxima*, mais pas de minima.

Sois alors e_n l'ensemble des points appartenant aux divers éléments que l'on a dû successivement balayer pour obtenir u_n; sur la frontière de e_n et en dehors de e_n, on a:

$$t > 0, \ u_n = 0, \ t - u_n > 0$$

on aura donc aussi à l'intérieur de e_n (où il ne peut pas y avoir de minima):

$$t - u_n > 0 \qquad t > u_n$$

et comme cela a lieu quel que soit n, on a dans E, à la limite.

$$t \geq u.$$

Mais nous pouvons trouver une suite de points

$$m_1, m_2, \ldots, m_h, \ldots$$

qui appartiennent à E et qui se rapprochent indéfiniment de q, puisque q fait partie de E'. Si

$$\lim m_h = q, \qquad \lim \theta(|m_h - q|) = 1.$$

Soient t_h et w_h les valeurs de t et de w correspondant à m_h, on aura

$$|w_h| > \theta(|m_h - q|), \qquad \lim |w_h| = 1, \qquad \lim t_h = 0.$$

Or $u = \log\left|\frac{1}{z}\right|$ et se réduit à $\log\left|\frac{1}{m_h}\right|$ pour $z = m_h$. L'inégalité $t > u$ nous donne donc

$$t_h > \log\left|\frac{1}{m_h}\right| > 0.$$

On a donc

$$\lim \log\left|\frac{1}{m_h}\right| = 0$$

et à la limite

$$\log\left|\frac{1}{q}\right| = 0, \qquad |q| = 1.$$

Le point q est donc sur la circonférence du cercle K, et comme q est quelconque, tous les points de la frontière sont sur cette circonférence, c'est à dire que $\boldsymbol{E}$ comprend tous les points intérieurs à $\boldsymbol{K}$.

C. Q. F. D.

Nous allons donner de la même proposition une seconde démonstration.

Remarquons d'abord que les u_n considérées comme fonctions de z vont se comporter comme des potentiels logarithmiques; et *les masses génératrices seront les mêmes que les masses correspondantes, quand on regardait les u_n comme fonctions de $x = \xi + i\eta$.* Je ne veux pas dire que les *densités* restent les mêmes, parce que les aires et les longueurs sur K ne sont pas égales aux aires et aux longueurs sur D; mais dans deux aires, ou dans deux arcs correspondants, les quantités totales de matière attirante sont les mêmes. Je fais en passant cette remarque bien qu'elle ne doive jouer aucun rôle essentiel dans la démonstration qui va suivre, parce qu'elle découle immédiatement des propriétés de la représentation conforme.

Nous allons nous appuyer sur l'un des théorèmes de Green, qui est le suivant. Soient V et V' deux potentiels par exemple logarithmiques, on aura l'identité:

$$\sum m V' = \sum m' V \tag{1}$$

les masses m sont celles qui engendrent le potentiel V, et chacune d'elles doit être multipliée par la valeur de V' au point occupé par cette masse. De même les masses m' sont celles qui engendrent V', chacune d'elles doit être multipliée par la valeur correspondante de V.

Nous allons appliquer ce théorème:

1°. A la fonction u regardée comme fonction de z, c'est un potentiel logarithmique engendré par une masse $+1$ située au point 0, et par des masses négatives $-m$ réparties sur la circonférence de K.

2°. A la fonction u_n regardée comme fonction de z, c'est un potentiel logarithmique engendré par une masse $+1$ située au point 0, et par des masses négatives $-m_n$ réparties sur les lignes de discontinuité l.

3°. A un potentiel auxiliaire w que nous allons définir.

Soit

$$|z| = r = e^{-u}.$$

Soit W un potentiel logarithmique, dû à des masses μ, toutes positives et toutes situées à l'intérieur de K et au sujet desquelles je suppose:

1° que la somme des masses μ contenues entre les deux circonférences concentriques à K et de rayons r' et $r'+dr'$, que cette somme, dis-je, est égale à $h'dr'$, h' étant une fonction quelconque de r', positive et finie.

2° que si sur la circonférence de rayon r', il y a des points de E_1, toutes les masses μ qui se trouvent sur cette circonférence, sont sur E_1.

Si alors r' et θ' sont les coordonnées polaires de la masse attirante μ; si $r=e^{-u}$, $\theta=-v$ sont celles du point attiré, on aura:

$$W=\sum\mu\log\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')}}.$$

Soit W' le potentiel que l'on déduit de W en *balayant* le cercle K; il est dû à des masses positives μ' situées sur la circonférence de K, et il est égal à W en dehors de K et sur la circonférence de K. Posons enfin

$$w=W-W'.$$

La potentiel w est alors dû aux masses μ et $-\mu'$; il est égal à zéro hors de K et sur la circonférence de K. A l'intérieur de K on a:

$$w=\sum\mu\log\sqrt{\frac{r^2r'^2+1-2rr'\cos(\theta-\theta')}{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')}}>0.$$

Le radical du second membre, quand on fait varier $\theta-\theta'$, atteint son maximum pour $\theta-\theta'=0$ et cela quels que soient r et r' (qui sont <1). On a donc:

$$w<\sum\mu\log\frac{1-rr'}{|r-r'|}=\int_0^1 h'dr'\log\frac{1-rr'}{|r-r'|}.$$

On voit aisément que le dernier membre est toujours fini et positif; qu'il s'annule pour $r=1$ et *que si h' s'annule pour* $r'=1$, si par exemple $h'=1-r'$, il s'annule comme u de sorte que le rapport de w à u reste fini. On peut donc trouver une quantité positive λ telle que

(2) $$w<\lambda u.$$

La formule (1) appliquée à u et à u_n nous donne:

$$(u-u_n)_0=\sum m_n u-\sum m u_n.$$

Le 1er membre représente la valeur de $u-u_n$ au point O où sont les deux masses $+1$; dans le second membre, il faut donner à u les valeurs correspondant aux diverses masses m_n et à u_n les valeurs correspondant aux diverses masses m.

Mais ces dernières masses sont toutes sur K et sur cette circonférence u_n est nul. Nous pouvons donc écrire:

(3) $$(u - u_n)_0 = \sum m_n u.$$

Appliquons maintenant le théorème de Green à u et à w, il viendra:

(4) $$w_0 - \sum m w = \sum \mu u - \sum \mu' u,$$

w_0 étant la valeur de w en o. De même en l'appliquant à u_n et à w:

(5) $$w_0 - \sum m_n w = \sum \mu u_n - \sum \mu' u_n.$$

Toutes les masses μ' sont sur la circonférence K de même que toutes les masses m, or sur K on a:

$$w = u = u_n = 0.$$

Nos équations peuvent donc s'écrire:

(4 bis) $$w_0 = \sum \mu u$$

(5 bis) $$w_0 - \sum m_n w = \sum \mu u_n$$

ou en retranchant, et tenant compte de (2)

$$\sum \mu (u - u_n) = \sum m_n w < \lambda \sum m_n u$$

ou en vertu de (3)

(6) $$\sum \mu (u - u_n) < \lambda (u - u_n)_0$$

la différence $u - u_n$ est toujours positive; mais sur les points de E_1 on a $u_n = 0$; de sorte que si sur la circonférence de rayon r', il y a des points de E_1, comme toutes les masses μ de cette circonférence seront en ces points, la valeur correspondante de $u - u_n$ sera:

$$u = \log \frac{1}{r'}.$$

On aura donc

(7) $$\sum \mu (u - u_n) > \int_\alpha^1 h' dr' \log \frac{1}{r'}.$$

α étant la plus courte distance du point O à l'ensemble E_1; car s'il y a des points de E_1 pour $r' = \alpha$, il y en aura, comme nous l'avons montré plus haut pour $r' > \alpha$. On a donc

$$\int_\alpha^1 h' dr' \log \frac{1}{r'} < \lambda (u - u_n)_0.$$

Quand n croît indéfiniment la différence $(u-u_n)_0$ tend vers zéro; il en est donc de même du 1[er] membre, ce qui veut dire que α tend vers 1; on a donc

$$\alpha = 1,$$

ce qui veut dire que l'ensemble E_1 se réduit à la circonférence K.

C. Q. F. D.

§ 9. Propriétés des fonctions uniformisantes.

Considérons un système quelconque

$$(1) \qquad y_1, y_2, \ldots$$

de fonctions multiformes de x. Nous avons vu au § 4 que si D est le domaine principal de ce système, on peut toujours trouver un domaine D' régulièrement multiple de D, et simplement connexe, pour lequel la fonction de Green u existe.

Ce domaine D' étant simplement connexe, les § 5 et 8 nous apprendront qu'on peut déduire de u une fonction z; que si dans le plan des z on trace le cercle K de centre O et de rayon 1; à tout point de K correspond un point de D' et un seul, et réciproquement. Donc

$$y_1, y_2, \ldots, x$$

sont des fonctions uniformes de z, $x=\psi(z)$, $y_i=\theta_i(z)$.

J'ajoute qu'à tout point pour lequel les fonctions $y_1, y_2, \ldots$, existent toutes, correspondra un point intérieur à K, et non pas un point situé sur la circonférence de K. Il suffit pour obtenir ce résultat de choisir convenablement la fonction fuchsienne auxiliaire du § 4 et d'admettre les éléments algébriques. *Il n'y a pas d'Ausnahmsstellen.*

Cherchons maintenant les propriétés de ces fonctions uniformes de z,

$$x=\psi(z),\ y_i=\theta_i(z).$$

Nous avons dit que D' était régulièrement multiple de D; cela veut dire qu'à tout point M de D; correspondent divers points

$$M_1, M_2, \ldots$$

de D'; si de plus le point M varie sur D d'une manière continue, il en sera de même des points $M_1, M_2, \ldots$, sur D'. Si M décrit une courbe fermée infiniment petite, il en sera de même de $M_1, M_2, \ldots$, mais cela ne sera plus vrai en général si la courbe fermée décrite par M n'est pas infiniment petite.

Je dis maintenant que si M_1 décrit une courbe fermée finie, il en sera de même de M_2. Cela tient à ce que le domaine D' est simplement connexe. Soit en effet C la courbe fermée décrite par M_1, elle limitera une certaine aire située

sur D'. Décomposons cette aire en une infinité d'aires infiniment petites. Quand M_1 décrira le contour d'une de ces aires partielles, M_2 reviendra à sa valeur initiale et décrira une courbe fermée. Il devra donc en être de même quand M_1 décrira le contour de l'aire totale.

Donc M_2 est fonction *uniforme* de M_1 et réciproquement. Soit

$$M_2 = \Omega(M_1)$$

la fonction ainsi définie; si A est une courbe, ou une aire décrite par le point M_1 alors $\Omega(A)$ sera la courbe ou l'aire correspondante décrite par M_2. Par exemple cette aire A peut-être un des éléments du domaine D' et alors $\Omega(A)$ sera un autre élément de D'.

Cela posé considérons les fonctions

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$$

formées en partant du point O et en balayant successivement les éléments

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n,\ \ldots$$

du domaine D'.

Formons ensuite les fonctions

$$u'_0,\ u'_1,\ u'_2,\ \ldots,\ u'_n,\ \ldots$$

en partant du point $\Omega(o)$ et en balayant successivement les éléments

$$\Omega(C_1),\ \Omega(C_2),\ \ldots,\ \Omega(C_n),\ \ldots$$

du domaine D'.

Les éléments correspondants C_n, et $\Omega(C_n)$ coïncident au point de vue géométrique, de même que les points O et $\Omega(O)$; les opérations donneront donc les mêmes résultats et on aura, pour un point M_1 quelconque du domaine D'

$$u'_n[\Omega(M_1)] = u_n[M_1]$$

et à la limite:

$$u'[\Omega(M_1)] = u[M_1]$$

en appelant u' et u les limites des deux suites u'_n et u_n.

Or u' et u sont les fonctons de Green formées respectivement en partant des deux points $\Omega(O)$ et O; à l'aide de ces deux fonctions on peut former les deux fonctions z et z' par les procédés du § 5. Nous avons vu au § 7 que ces deux fonctions sont liées par une relation linéaire. Donc les valeurs de z qui correspondent aux deux points

$$M_1,\ \Omega(M_1)$$

sont liées par une relation linéaire. Mais ces deux points correspondent à un

même point M du domaine D, et par conséquent aux mêmes valeurs des fonctions:

$$y_i = \theta_i(z) \qquad x = \psi(z).$$

Donc ces fonctions $\psi(z)$ et $\theta_i(z)$ ne sont pas altérées par certaines relations linéaires. Ces relations linéaires sont généralement en nombre infini, parce que les points de D' qui correspondent à un même point de D sont généralement en nombre infini. Elles forment naturellement un groupe; enfin de même que les substitutions des groupes fuchsiens elles n'altèrent pas la circonférence K. Ce groupe tout à fait analogue aux groupes fuchsiens peut s'appeler *fuchsoïde; ainsi nos fonctions $\psi(z)$, $\theta_i(z)$ ne sont pas altérées par les substitutions linéaires d'un groupe fuchsoïde.*

§ 10. Relations entre les fonctions de Green.

Comparons maintenant les fonctions u_n relatives au domaine D, et celles qui sont relatives au domaine D', régulièrement multiple de D.

Soit M un point de D et

$$\Omega_1(M), \ \Omega_2(M), \ \ldots$$

les points correspondants de D'; les fonctions Ω_1, Ω_2, ... sont continues, mais il peut se faire qu'elles s'échangent les unes avec les autres quand M décrit une courbe fermée sur D.

Considérons la suite des fonctions

$$u_0^{(1)}, \ u_1^{(1)}, \ \ldots, \ u_n^{(1)}, \ \ldots$$

relatives au domaine D' et obtenues en partant du point $\Omega_1(O)$ et en balayant successivement les éléments

$$\Omega_1(C_1), \ \Omega_1(C_2), \ \ldots, \ \Omega_1(C_n), \ \ldots$$

Considérons de même la suite des fonctions

$$u_0^{(k)}, \ u_1^{(k)}, \ \ldots, \ u_n^{(k)}, \ \ldots$$

relatives au domaine D' et obtenues en partant de $\Omega_k(O)$ et balayant successivement

$$\Omega_k(C_1), \ \Omega_k(C_2), \ \ldots, \ \Omega_k(C_n), \ \ldots$$

D'après le § précédent on aura, pour un point M quelconque.

$$u_n^{(k)}[\Omega_k(M)] = u_n^1[\Omega_1(M)].$$

Considérons enfin les fonctions:

$$U_0, \ U_1, \ \ldots, \ U_n, \ \ldots$$

relatives au domaine D et obtenues en partant du point O et balayant successivement les éléments suivants de D:

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n,\ \ldots$$

Je désignerai par C_0 l'élément de D dont fait partie le point o. Alors le point $\Omega_k(O)$ fera partie des éléments $\Omega_k(C_0)$. Les différents éléments $\Omega_k(C_0)$ n'ont aucun point commun.

Supposons en effet que deux éléments $\Omega_i(C_0)$ et $\Omega_k(C_0)$ aient un point identique, tous leurs points qui ont mêmes coordonnées devront être identiques, d'après l'une des conditions énoncées au § 2. Or ces deux éléments coïncident au point de vue géométrique, donc tous les points correspondants de ces deux éléments devraient être identiques; si ensuite $\Omega_i(C_1)$ est contigu à $\Omega_i(C_0)$, $\Omega_k(C_1)$ est contigu à $\Omega_k(C_0)$; les deux éléments $\Omega_i(C_1)$ et $\Omega_k(C_1)$ auraient donc des points identiques, et il s'ensuivrait, comme pour $\Omega_i(C_0)$ et $\Omega_k(C_0)$, que ces deux éléments devraient être identiques; on verrait alors de proche en proche, que quel que soit le point M, $\Omega_i(M)$ serait identique à $\Omega_k(M)$.

Nous devons donc admettre que les deux éléments $\Omega_i(C_0)$ et $\Omega_k(C_0)$ ne peuvent avoir aucun point commun, et il en serait de même évidemment pour les deux éléments $\Omega_i(C_n)$ et $\Omega_k(C_n)$.

Cela posé, je me propose de démontrer que l'on a en un point quelconque du domaine D'

$$U_n = \sum_k u_n^{(k)} \tag{1}$$

et d'abord que

$$U_0 = \sum_k u_0^{(k)}.$$

Considérons un point M quelconque de D'; s'il n'appartient à aucun des $\Omega_k(C_0)$ on aura:

$$U_0 = u_0^{(k)} = 0.$$

S'il appartient à l'un des $\Omega_k(C_0)$, il ne pourra appartenir à aucun des $\Omega_i(C_0)$, on aura donc:

$$u_0^{(i)} = 0 \qquad \text{(si } i \gtrless k\text{)}$$

et d'ailleurs, d'après la façon dont les fonctions u_0 sont formées:

$$U_0 = u_0^{(k)}.$$

On aura donc dans tous les cas

$$U_0 = \sum_k u_0^{(k)}.$$

Je dis maintenant que si

$$U_{n-1} = \sum_k u_{n-1}^{(k)} \tag{2}$$

on aura également

$$U_n = \sum_k u_n^{(k)}.$$

En effet si le point M n'appartient à aucun des $\Omega_k(C_n)$ c'est à dire à l'un des éléments que l'on balaye pour passer des fonctions d'indice $n-1$ aux fonctions d'indice n, on aura:

$$U_n = U_{n-1} \qquad u_n^{(k)} = u_{n-1}^{(k)}.$$

Si M appartient à l'un des $\Omega_k(C_n)$, il n'appartiendra à aucun autre des $\Omega_i(C_n)$; Les masses génératrices de la fonction U_{n-1}; s'obtiendront en ajoutant entre elles toutes les masses génératrices des fonctions $u_{n-1}^{(k)}$, en vertu de l'équation (2) et de la définition de ces masses génératrices. En balayant toutes ces masses on aura donc:

$$U_n - U_{n-1} = \sum (u_n^{(k)} - u_{n-1}^{(k)}).$$

C. Q. F. D.

Qu'arrive-t-il maintenant quand n croît indéfiniment; $u_n^{(k)}$ tend vers une limite $u^{(k)}$ que nous supposons finie, et U_n tend vers une limite U qui peut être infinie. On a donc:

$$U = U_0 + \sum_n (U_n - U_{n-1}) = \sum_k u_0^{(k)} + \sum_n \sum_k (u_n^{(k)} - u_{n-1}^{(k)}).$$

Il faut ici sommer d'abord par rapport à k, puis par rapport à n, mais comme les termes de ces séries sont essentiellement positifs, on peut en intervertir l'ordre et écrire:

$$U = \sum_k u_0^{(k)} + \sum_k \sum_n (u_n^{(k)} - u_{n-1}^{(k)}) = \sum_k u^{(k)}.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction de Green existe pour le domaine D, c'est à dire pour que la suite des U_n ait une limite finie c'est que la série $\sum_k u^k$ converge.

Si cette condition est remplie, nous voyons que les fonctions U et u^k étant harmoniques et positives, on aura également, par le théorème de Harnack

$$\frac{dU}{d\xi} = \sum \frac{du^{(k)}}{d\xi}, \quad \frac{dU}{d\eta} = \sum \frac{du^{(k)}}{d\eta}.$$

et par conséquent:

$$V = \sum v^{(k)}; \quad Z = \prod z^{(k)}$$

$v^{(k)}$, $z^{(k)}$, V, Z étant formées avec $u^{(k)}$, U, comme v et z l'ont été avec u au § 5; (la lettre Π représente un produit infini).

Mais les variables $z^{(k)}$ sont liées entre elles par les relations linéaires, qui forment le groupe fuchsoïde du § précédent. *On prendra donc les diverses trans-*

formées de z par les substitutions linéaires de ce groupe fuchsoïde, on en fera le produit; si ce produit converge c'est que la fonction de Green existe pour le domaine D et ce produit est précisément la fonction Z déduite de cette fonction de Green U par les procédés du § 5.

§ 11. Propriétés du groupe fuchsoïde.

Soit

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

la substitution la plus générale de notre groupe fuchsoïde. Désignons par $u(D, O)$ la fonction de Green relative au domaine D et qui devient infinie au point O. De cette façon; les fonctions

$$u^{(k)}, \ U$$

du § précédent seront désignées par

$$u[D', \Omega_k(O)], \ u(D, O).$$

Nous désignerons par $z(D, O)$ la fonction déduite de $u(D, O)$ comme z a été déduit de u au paragraphe 5.

Nous désignerons simplement par z la fonction $z[D', \Omega_1(0)]$ et ce sera notre nouvelle variable indépendante. Nous aurons alors:

$$z[D', \Omega_k(O)] = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}.$$

le second membre correspondant à l'une des substitutions du groupe fuchsoïde; d'après cela, on devra avoir $\alpha_1 = \delta_1 = 1$, $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, de sorte que l'indice 1 correspondra à la substitution identique.

On aura alors, d'après le § précédent:

$$(1) \qquad z(D, O) = \prod \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}.$$

Soit maintenant $\Omega_1(O')$ un autre point quelconque de D', on aura d'après le § 7

$$z[D', \Omega_1(O')] = \frac{az + b}{cz + d}$$

a, b, c, d étant des constantes; on en conclut

$$z[D', \Omega_k(O')] = \frac{a(\alpha_k z + \beta_k) + b(\gamma_k z + \delta_k)}{c(\alpha_k z + \beta_k) + d(\gamma_k z + \delta_k)}$$

et on trouvera encore:

$$z(D, O') = \prod z[D', \Omega_k(O')] = \prod \frac{a(\alpha_k z + \beta_k) + b(\gamma_k z + \delta_k)}{c(\alpha_k z + \beta_k) + d(\gamma_k z + \delta_k)}. \tag{2}$$

Il s'agit donc de savoir si la somme

$$u(D, O) = \sum \log \left| \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \right|$$

converge, c'est à dire si la fonction de GREEN existe pour le domaine D.

Or en vertu d'un théorème bien connu la condition nécessaire et suffisante pour que cette série

$$\sum \log \left| \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right|$$

converge, c'est que la série

$$\sum \left(1 - \left| \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right| \right)$$

converge absolument, ou encore que la série:

$$\sum \left(1 - \left| \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right|^2 \right)$$

converge ou encore qu'il en soit ainsi de la série:

$$\sum \left[1 - \frac{(\alpha z + \beta)(\gamma z' + \delta)}{(\gamma z + \delta)(\alpha z' + \beta)} \right]$$

en désignant par z' une quantité qui a même argument que z et même module que $\frac{1}{z}$; et en effet

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \frac{\gamma z' + \delta}{\alpha z' + \beta}$$

sont imaginaires conjuguées. Or cela peut s'écrire (en tenant compte de $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$);

$$\sum \frac{z - z'}{(\gamma z + \delta)(\alpha z' + \beta)}.$$

Il est aisé de voir que pour les termes d'ordre élevé, pour lesquels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ont de très grandes valeurs, $|\alpha z' + \beta|$ est sensiblement égal à $|\gamma z' + \delta|$ et à $|\gamma z + \delta|$.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction de Green existe c'est que la série:

$$\sum \frac{1}{|\gamma z + \delta|^2}$$

converge.

Reportons-nous au premier chapitre de mon mémoire sur les fonctions fuchsiennes et rappelons un des modes de raisonnement que nous y avons employés; soit S une petite aire enveloppant le point z, et soit S_k (loco citato) ce que devient cette aire quand on change z en $\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}$. Nous avons vu que ces aires sont entre elles comme les quantités

$$\frac{1}{|\gamma_k z + \delta_k|^4}$$

et comme la série $\sum S_k$ converge certainement, puisque la somme de toutes ces aires est toujours plus petite que le cercle fondamental, nous en avons conclu que la série

$$\sum \frac{1}{|\gamma z + \delta|^4}$$

converge toujours, ce qui est le fondement de la théorie des fonctions thétafuchsiennes.

Dans le cas qui nous occupe, nous pouvons en tirer la conclusion suivante: *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction de Green existe pour le domaine D, c'est que la série*

$$\sum \sqrt{S_k}$$

converge.

Si cette condition est remplie, et si D est simplement connexe, il existe une fonction Z qui prend aux différents points du domaine D toutes les valeurs intérieures au cercle de rayon 1 et ne prend chacune d'elles qu'une fois. Elle permet la représentation conforme du domaine D sur un cercle. Elle n'est pas alterée par les substitutions du groupe fuchsoïde.

Si cette condition est remplie, et si D n'est pas simplement connexe, il existe une fonction Z qui par rapport aux substitutions du groupe fuchsoïde satisfait à la condition:

$$Z\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = M_k Z(z)$$

M_k étant une constante de module 1.

Qu'arrive-t-il enfin si la condition n'est pas remplie. On pourrait former les séries thétafuchsiennes, lambdafuchsiennes, etc., tout comme avec les fonctions fuchsiennes ordinaires; on arriverait ainsi à l'étude complète du domaine D. Mais nous suivrons une autre voie.

§ 12. Le domaine D_1 et sa fonction de Green.

Je vais utiliser les résultats de la méthode alternante de M. Schwarz. Reprenons notre domaine D, sur lequel nous ne faisons aucune hypothèse. Soit C_0 un élément de ce domaine, où se trouvera le point O, et C'_0 un autre élément qui aura pour centre le point O'. Nous pourrons toujours supposer que le point O qui appartient à C_0, n'appartient à aucun autre élément de D, contigu à C_0, et de même que le point O' qui appartient à C'_0 n'appartient à aucun autre élément de D, contigu à C'_0.

Construisons ensuite un domaine D_1 contenu dans D, et qu'on déduira de D tout simplement en supprimant l'élément C'_0; les points de D qui font partie de C'_0, sans appartenir à aucun autre élément de D, contigu à C'_0 ne feront pas partie de D_1; et au contraire les points des éléments contigus à C'_0 appartiendront à D_1, bien que faisant partie de C'_0.

Je dis d'abord que la fonction de Green existera pour ce domaine D_1. Formons en effet comme au § 3, la série des fonctions u_n en partant du point O et en effectuant une série de balayages successifs portant sur les divers éléments de D_1 (c'est à dire sur les divers éléments de D, sauf sur C'_0). Ces fonctions u_n sont des potentiels logarithmiques engendrés par une masse positive $+1$ située en O et par diverses masses négatives dont la somme est égale à -1.

Cherchons la valeur moyenne de u_n sur la circonférence de C'_0; prenons pour un instant des coordonnées polaires r et ω, en prenant pour pôle le centre de C'_0, c'est à dire le point O', et envisageons l'intégrale:

$$J = \int u_n d\omega$$

prise le long d'une circonférence ayant son centre en O'; nous aurons:

$$r\frac{dJ}{dr} = \int \frac{du_n}{dr} r d\omega.$$

Cette intégrale est, en vertu des théorèmes de Green, égale à -2π multiplié par la somme des masses génératrices situées à l'intérieur de la circonférence. Cette somme est plus petite que 1 en valeur absolue; on a donc:

$$2\pi > r\frac{dJ}{dr} > 0.$$

Si alors r_0 est le rayon de la circonférence de C_0 et si r_1 est la plus courte distance de O' à la frontière de D_1, on aura:

$$J_0 < J_1 + 2\pi \log \frac{r_0}{r_1}.$$

Mais J_1 est nul puisque u_n est nul en tous les points de C'_0 qui ne font pas partie de D_1; r_1 n'est pas nul, car le point O' et les points voisins ont été supposés en dehors de D_1; on a donc:

$$J_0 = \int u_n d\omega < 2\pi \log \frac{r_0}{r_1}$$

ce qui veut dire que la valeur moyenne de u_n sur la circonférence de C'_0 est plus petite que $\log \frac{r_0}{r_1}$; à fortiori la valeur minimum de u_n sur cette circonférence sera plus petite que $\log \frac{r_0}{r_1}$.

Soit E_n l'ensemble des arcs de cette circonférence tels que

$$u_n < \log \frac{r_0}{r_1}.$$

On voit que E_n ne peut pas se réduire à rien, quel que soit n. De plus E_{n+1} est contenu dans E_n puisque

$$u_{n+1} > u_n.$$

Donc il y a sur la circonférence de C'_0 au moins un point M tel que l'on ait, pour toutes les valeurs de n

$$u_n < \log \frac{r_0}{r_1}.$$

En ce point M la suite des u_n convergera; et comme elle ne peut converger en un point sans converger partout (voir § 3) elle convergera dans tout le domaine D_1. La fonction de GREEN que nous appellerons $u(D_1, O)$ existe donc pour ce domaine D_1.

Soit δ la partie commune à C'_0 et à D_1; ce sera un domaine limité extérieurement par la circonférence C'_0 et intérieurement par une ligne fermée L_0, formée d'un nombre fini d'arcs de cercle appartenant aux circonférences des divers éléments contigus à C'_0. Cette ligne fermée L_0 fera partie de la frontière de D_1.

On peut vérifier que la fonction de GREEN $u(D_1, O)$ tend vers zéro quand on se rapproche de L_0. En effet, cette fonction est harmonique et par conséquent analytique sur la circonférence C'_0 qui est tout entière à l'intérieur de D_1. Nous pouvons donc construire une fonction T qui soit harmonique dans le domaine δ, qui soit égale à 0 sur L_0 et à $u(D_1, O)$ sur la circonférence C_0. On aura alors

$$u_n = T = 0$$

sur L_0 et

$$u_n < T$$

sur la circonférence C'_0. Comme $u_n - T$ ne peut admettre que des minima, on aura:

$$u_n < T$$

dans tout le domaine δ; et par conséquent

$$0 < u(D_1, O) \leq T.$$

Mais quand on se rapproche de L_0, T tend vers zéro, il en est donc de même de $u(D_1, O)$. Donc T et $u(D_1, O)$ sont deux fonctions harmoniques dans le domaine δ et qui prennent les mêmes valeurs sur la frontière de ce domaine. Elles sont donc égales et l'on a:

$$u(D_1, O) = T.$$

Cela nous prouve en même temps, qu'en tous les points de L_0, la dérivée $\frac{du(D_1, O)}{dn}$ se comporte régulièrement, puisqu'il en est ainsi de $\frac{dT}{dn}$; et il en est ainsi de $\frac{dT}{dn}$, puisque le domaine dans lequel la fonction T est définie est limité par un nombre fini d'arcs de cercle et que tous les raisonnements habituels relatifs au problème de Dirichlet lui sont applicables sans difficulté.

Cela posé, supposons que le domaine D soit simplement connexe, le domaine D_1 ne le sera pas en général, car par exemple la circonférence C'_0 limite une aire faisant partie de D, à savoir le cercle C'_0, mais cette aire ne fait pas partie de D_1. Pour rendre le domaine D_1 simplement connexe, nous allons y pratiquer une coupure Q. La coupure Q sera une ligne qui partira d'un point quelconque de L_0 et qu'on prolongera indéfiniment dans le domaine D_1.

Je précise; imaginons une série de domaines successifs que j'appellerai

$$d_1, d_2, d_3, \ldots$$

définis de la façon suivante; chacun d'eux sera formé d'un nombre fini d'éléments de D_1; d_1 comprendra entre autres tous ceux de ces éléments qui sont contigus à C''_0; d_{n+1} comprendra tous les éléments de d_n et d'autres encore; enfin nous nous arrangerons pour que le domaine comprenant C'_0 et tous les éléments de d_n et que j'appellerai e_n soit simplement connexe, et que tout élément de D_1 fasse partie de l'un des domaines d_n (et par conséquent de tous les domaines suivants $d_{n+1}, \ldots$)

Le domaine e_n étant simplement connexe sera limité par une certaine courbe fermée L_n; alors le domaine d_n sera doublement connexe et compris entre les deux

courbes L_n et L_0; le domaine $d_{n+1} - d_n$ sera doublement connexe et compris entre les deux courbes L_{n+1} et L_n.

Alors notre coupure Q sera composée d'une série d'arcs $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, etc., l'arc Q_n allant de L_{n-1} à L_n à travers le domaine $d_n - d_{n-1}$. Dans ces conditions la coupure Q rend le domaine D_1 simplement connexe, et en effet si une courbe fermée quelconque tracée sur D_1, n'enferme pas une aire appartenant à D_1, cette courbe appartiendra à l'un des domaines d_n et enveloppera la ligne L_0, elle coupera donc la coupure $Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$, et par conséquent la coupure Q.

Soit D_2 le domaine obtenu en partant de D_1 et le rendant simplement connexe par l'introduction de la coupure Q. Il va sans dire que certains éléments de D_1 étant traversés par la coupure Q, devront être remplacés dans le domaine D_2 par d'autres éléments en nombre fini ou infini, disposés de telle sorte qu'aucun de ces éléments nouveaux ne soit traversé par Q et que tous les points de l'élément ancien, sauf ceux de la coupure Q, appartiennent au moins à l'un des éléments nouveaux.

Cela posé je dis que la fonction de Green $u(D_2, O)$ existe pour le domaine D_2; en effet soit

$$u_n(D_2, O)$$

une des fonctions obtenues par les balayages successifs, on aura:

$$u_n(D_2, O) < u(D_1, O)$$

puisque la dernière fonction est harmonique et positive dans tout le domaine D_1 et par conséquent dans tout le domaine D_2; que u_n, (à part la masse $+ 1$ qui est au point O) n'est engendré que par des masses négatives de telle façon que la différenee

$$u_n(D_2, O) - u(D_1, O)$$

ne peut admettre que des minima et pas de maxima et est d'ailleurs négative dans tous les éléments où $u_n(D_2, 0)$ est nul, c'est à dire dans tous les éléments de D_2 sauf un nombre fini d'entre eux.

Donc la suite des $u_n(D_2, O)$ converge.

C. Q. F. D.

Le domaine D_2 étant simplement connexe, l'existence de la fonction $u(D_2, O)$ entraîne celle de la fonction $z(D_2, O)$, c'est à dire d'après les § 5, 6, 7, 8 la possibilité de la représentation conforme du domaine D_2 sur un cercle K. On voit alors, que la circonférence de K va se partager en quatre arcs; l'un l'arc AB correspondra à la ligne L_0, les deux extrémités A et B correspondant au point où la coupure Q aboutit à L_0; deux autres arcs $A'A$ et BB' correspondront aux deux lèvres de la coupure Q. Le quatrième arc $B'A'$ correspondrait à la

frontière du domaine primitivement donné D. Mais *ce dernier arc $B'A'$ peut se réduire à un point.*

Nous sommes donc amenés à distinguer deux cas:

1°. Celui où l'arc $B'A'$ ne se réduit pas à un point. Dans ce cas je dis que le domaine D_1 est susceptible d'une représentation conforme sur un anneau circulaire et le domaine D sur un cercle; la fonction de GREEN $u(D, O)$ existe.

2°. Celui où l'arc $B'A'$ se réduit à un point. Dans ce cas je dis que le domaine D_1 est susceptible de représentation conforme sur un cercle, et le domaine D sur une sphère fermée.

§ 13. La fonction V.

Proposons-nous d'abord de construire une fonction V qui soit harmonique dans le domaine D_1, égale à 1 sur L_0 et qui tende vers zéro quand on se rapproche de la frontière du domaine primitivement donné D. Partons d'une fonction V_0 ainsi définie:

1°. A l'intérieur de L_0, (c'est à dire dans la partie de D qui ne fait pas partie de D_1) on a $V_0 = 1$.

2°. Sur L_0 on a $V_0 = 1$.

3°. En dehors de C'_0 et sur la circonférence de C'_0 on a $V_0 = 0$.

4°. Dans le domaine δ, c'est à dire entre la circonférence C'_0 et L_0, la fonction V_0 est harmonique, elle tend vers zéro quand on se rapproche de la circonférence C'_0 et vers 1 quand on se rapproche de L_0; elle est donc toujours comprise entre 0 et 1.

Nous allons maintenant en partant de cette fonction V_0, balayer successivement les divers éléments de D_1.

Cette fonction V_0 se comporte comme un potentiel logarithmique engendré par diverses masses situées sur L_0 et à l'intérieur de L_0 (donc en dehors des éléments de D_1) et sur lesquelles par conséquent ne porteront pas les balayages, et par des masses *négatives* situées sur la circonférence de C'_0.

Les masses balayées étant toutes négatives, les fonctions V_n seront toujours croissantes, toujours comprises entre 0 et 1. La suite des V_n convergera donc vers une certaine limite V qui sera harmonique dans le domaine D_1.

Je dis que V tend vers 1 quand on se rapproche de L_0. Soit en effet λ un des arcs de L_0, soit c la circonférence à laquelle cet arc appartient et qui limitera un cercle c correspondant à un élément de D contigu à C'_0; je suppose d'abord que l'on se rapproche de l'arc λ, je construis une fonction T, harmonique

à l'intérieur de c, égale à 1 sur λ et à 0 sur le reste de la circonférence c. Au moment où on vient de balayer c; la fonction V_n est harmonique dans c; et on a:

$$V_n = T = 1 \quad \text{sur } \lambda$$
$$V_n > 0 = T \quad \text{sur le reste de la circonférence } c.$$

On a donc à l'intérieur de c

$$1 > V_n > T$$

et par conséquent à la limite:

$$1 > V > T.$$

Quand on se rapproche de λ, T tend vers 1, il en est donc de même de V. Il reste à voir ce qui se passe quand on se rapproche de l'extrémité d'un des arcs λ, c'est à dire du point d'intersection de deux circonférences telles que c. Il n'est pas nécessaire pour cela de répéter la discussion. Soient c et c' ces deux circonférences, A leur point d'intersection, λ et λ' les deux arcs de L_0 qui font partie de c et c'; du point A comme centre décrivons un cercle γ de rayon très petit, et considérons le domaine ε commun à γ et à D_1 et qui sera limité par une partie de la circonférence de γ et par une partie des arcs λ et λ'; dans ce domaine la fonction V est harmonique, elle tend vers 1 quand on se rapproche d'un quelconque des points de λ ou de λ', le point A excepté; cela suffit, d'après les propriétés bien connues des fonctions harmoniques, pour qu'elle tende encore vers 1 quand on se rapproche du point A.

On pourrait seulement se demander si la fonction V ne se réduit pas à une constante et n'est pas partout égale à 1.

Supposons d'abord qu'il n'en soit pas ainsi. Je dis qu'en tout point intérieur au domaine D_1 elle est plus petite que 1. Considérons en effet la représentation conforme du domaine D_2 défini plus haut sur le cercle K. Nous voyons que la fonction V (considérée non plus comme fonction d'un point N du domaine D_1 (ou D_2) mais comme fonction du point correspondant M du cercle K) est encore harmonique; elle est d'ailleurs toujours comprise entre 0 et 1. De plus en un point M au moins intérieur à K, la fonction V est < 1, puisque par hypothèse elle ne se réduit pas identiquement à 1. Soit alors M' un autre point intérieur à K; soient $V(M)$ et $V(M')$ les valeurs de V en ces deux points. Comme la fonction harmonique $1 - V$ est toujours positive, nous pouvons appliquer le théorème de Harnack et assigner une limite supérieure au rapport

$$\frac{1 - V(M')}{1 - V(M)}.$$

Comme $1 - V(M)$ n'est pas nul, il en est de même de $- V(M')$. Ainsi la fonction V n'est pas égale à 1, sauf peut être aux points de D_1 (ou de D_2) qui

correspondent à un point situé sur la circonférence de K. Mais les seuls points intérieurs à D_1 qui correspondent à un point de la circonférence de K sont ceux qui appartiennent à la frontière de D_2, c'est à dire les points de la coupure Q. Mais comme cette coupure Q a été arbitrairement tracée, et qu'on peut la changer, le théorème est vrai pour tous les points intérieures à D_1.

En particulier on peut assigner une limite inférieure différente de zéro à la différence $1 - V$ *sur la circonférence de* C'_0.

Nous aurions pu au lieu d'appliquer les procédés précédents au domaine D_1, les appliquer au domaine d_n que nous avons défini plus haut et qui est limité par les lignes L_n et L_0 (Cf. page 49) Nous aurions obtenu une fonction $V(d_n)$ qui aurait été à d_n ce que V est à D_1.

Ces fonctions $V(d_n)$ présentent une grande analogie avec les fonctions u_{p0} du § 6; on pourrait les obtenir en effet en partant de V et en balayant une infinité de fois tous les éléments de d_n avant de passer au balayage des autres éléments de D_1.

L'essentiel c'est que

$$V(d_n)$$

va en croissant avec n; l'application du théorème de Harnack nous apprend alors que la suite des $V(d_n)$ converge uniformément vers V, et que, [si V' est une dérivée quelconque de V et $V'(d_n)$ la dérivée correspondante de $V(d_n)$], la suite des $V'(d_n)$ converge uniformément vers V'.

Posons maintenant:

$$K_n = -\int \frac{dV(d_n)}{dr} ds, \quad K = -\int \frac{dV}{dr} ds.$$

Les intégrales sont prises le long de la circonférence de C'_0; ds est l'élément d'arc de cette circonférence; les dérivées $\frac{dV}{dr}$, $\frac{dV(d_n)}{dr}$ sont prises par rapport à la normale à cette circonférence; il résulte de ce qui précède que la suite des K_n converge vers K; nous poserons alors:

$$W = \frac{2\pi V}{K} \qquad W_n = \frac{2\pi V(d_n)}{K_n}.$$

On voit que la suite des W_n converge *uniformément* vers W, et que la suite des W'_n converge *uniformément* vers W', (en désignant par W et W'_n une dérivée quelconque de W et de W_n).

Nous allons maintenant définir des fonctions qui seront à W et W_n ce que v et z étaient à u au § 5. Posons à cet effet, comme dans ce § 5:

$$\frac{dW'}{d\xi} = -\frac{dW}{d\eta}, \quad \frac{dW}{d\xi} = \frac{dW'}{d\eta}$$

$$\frac{dW'_n}{d\xi} = -\frac{dW_n}{d\eta}, \quad \frac{dW_n}{d\xi} = \frac{dW'_n}{d\eta}$$

$$Z = e^{-(W+iW')}, \quad Z_n = e^{-(W_n+iW'_n)}.$$

Nous voyons que Z_n et ses dérivées convergent uniformément vers Z et ses dérivées. Les fonctions Z et Z_n sont uniformes, en effet, quand on tourne autour de L_0, W' et W'_n augmentent de 2π, tandis que Z et Z_n ne changent pas.

La variable Z_n nous donne la répresentation conforme du domaine d_n sur un anneau circulaire; en effet la frontière de d_n se compose de L_0 et de L_n, sur L_0 on a $V_n = 1$, $W_n = \frac{2\pi}{K_n}$, et sur L_n on a $W_n = 0$; il n'y a pas de difficulté pour établir ce dernier point puisque les lignes L_0 et L_n qui limitent le domaine d_n se composent d'un nombre fini d'arcs de cercle. Il résulte de là que Z_n ne peut prendre plus d'une fois la valeur A et par conséquent que l'intégrale

$$J_n = \int \frac{dZ_n}{Z_n - A}$$

prise le long d'un contour fermé quelconque ne peut être égale qu'à zéro ou à $2i\pi$. Mais nous avons vu que Z_n et ses dérivées convergent uniformément vers Z et ses dérivées, d'où il suit que J_n tend vers

$$J = \int \frac{dZ}{Z - A},$$

ce qui montre que cette intégrale ne peut être égale qu'à zéro ou $2i\pi$, et que Z ne peut pendre plus d'une fois la valeur A.

Donc la variable Z nous donne la représentation conforme du domaine D_1 sur un domaine plan, à un seul feuillet, c'est à dire dont les diverses parties ne se recouvrent pas mutuellement et qui est limité intérieurement par la circonférence de rayon $e^{-\frac{2\pi}{K}}$ et extérieurement par une ligne fermée ne pouvant sortir de la circonférence de rayon 1 (ce dernier point provient de ce que W est essentiellement positif).

Il faut maintenant établir que cette ligne fermée, qui limite extérieurement ce domaine plan n'est autre chose que la circonférence de rayon 1. C'est un problème analogue à celui du § 8. Nous n'avons qu'à répéter l'analyse de ce § que nous ne reproduirons pas. L'ensemble E des points du plan auxquels correspond un point de D_1 n'est plus simplement connexe, puisque D_1 n'est pas

simplement connexe; mais il est doublement connexe, étant limité intérieurement par la circonférence de rayon $e^{-\frac{2\pi}{K}}$; cette circonférence et une courbe fermée tracée dans E limitent alors toujours une aire faisant partie de E; si donc une circonférence de même centre, a tous ses points dans E, il ne pourra y avoir à l'intérieur de cette circonférence aucun point de l'ensemble E_1 des points du plan extérieurs à la circonférence ce rayon $e^{-\frac{2\pi}{K}}$ et n'appartenant pas à E.

En s'appuyant là dessus on définira comme au § la fonction auxiliaire de Osgood $\varphi(w)$.

Nous prendrons ensuite

$$t = A \log \left| \frac{1}{w} \right|$$

le coëfficient A étant assez grand pour que t soit plus grand que $\frac{2\pi}{K}$ c'est à dire que W_n le long de la circonférence de rayon $e^{-\frac{2\pi}{K}}$ qui limite interieurement E. Le reste de la démonstration se poursuit comme au § 8 et on arrive à la même conclusion: tout point q de la frontière de E est sur la circonférence de rayon 1.

Donc la fonction Z nous donne la représentation conforme de D_1 sur un anneau circulaire.

Nous avons ainsi:

1°. Le domaine D_1 applicable sur un anneau circulaire.

2°. L'élément C'_0 qui est un cercle.

Ces deux domaines ont une partie commune δ et leur ensemble forme le domaine

$$D = D_1 + C'_0 - \delta.$$

On peut alors appliquer un théorème connu de M. Schwarz et conclure que *D est applicable sur un cercle.* La fonction de Green $u(D, O)$ existe.

Où dans le raisonnement qui précéde, avons-nous été amenés à supposer que la fonction V ne se réduit pas à une constante égale à 1; c'est que si V se réduisait à 1, la quantité K serait nulle. Ce qui rendrait la démonstration illusoire. Supposons donc que V ne se réduit pas à 1, je dis que K ne sera pas nul. Nous avons en effet comme nous l'avons vu plus haut, une limite supérieure de V, plus petite que 1 sur la circonférence C'_0, c'est ce que nous avons expliqué plus haut, soit A cette limite; soit alors T une fonction harmonique dans le domaine δ, se réduisant à 1 sur L_0 et à A sur la circonférence C'_0; on aura

$$K > -\int \frac{dT}{dr} ds$$

et l'intégrale du 2[d] membre n'est pas nulle.

§ 14. Seconde démonstration.

On peut arriver au même résultat d'une façon plus simple par une autre voie. Observons d'abord que nous pouvons supposer que la ligne L_0, qui limite D_1 se réduit à une circonférence concentrique à C''_0. En effet rien ne nous oblige à prendre pour limite de D_1, les frontières de divers éléments de D, puisque ces éléments ont été tracés sur D d'une façon très arbitraire et qu'on aurait pu remplacer D par un domaine équivalent au sens du § 2. Si nous avions supposé plus haut que L_0 est une circonférence, plusieurs des raisonnements précédents auraient pu être simplifiés.

Soit O' le centre commun de C''_0 et de L_0, r_0 le rayon de L_0, r_1 celui de C''_0, r la distance d'un point quelconque à O'. Considérons la fonction V, elle est égale à 1 sur L_0, et sur C''_0 elle est $< A < 1$; je dis que nous pouvons assigner une limite inférieure à la dérivée

$$\frac{dV}{dr}$$

en un point quelconque de L_0; cette expression est d'ailleurs essentiellement positive; et en effet cette limite inférieure est

$$\frac{1 - A}{r_0 \log \frac{r_1}{r_1}} \cdot$$

Je l'appellerai q.

Soit ensuite à l'intérieur de L_0:

$$T = \log \frac{r_0}{r}$$

Nous aurons sur L_0

$$T = 0, \quad -\frac{dT}{dr} = \frac{1}{r_0} \cdot$$

Construisons alors une fonction U satisfaisant aux conditions suivantes:

1°. Dans D_1 on a

$$U = \frac{V}{q r_0} \cdot$$

2°. A l'intérieur de L_0 on a:

$$U = T + \frac{1}{q r_0} \cdot$$

3°. Sur L_0 on a

$$U = \frac{1}{q r_0} = \frac{V}{q r_0} = T + \frac{1}{q r_0} \cdot$$

Considérons deux points très voisins de L_0, l'un à l'extérieur, l'autre à l'intérieur: au 1[er] on aura:

$$-\left(\frac{dU}{dr}\right)_0 = \frac{-1}{qr_0}\frac{dV}{dr} > \frac{1}{r_0};$$

au second on aura

$$-\left(\frac{dU}{dr}\right)_1 = -\frac{dT}{dr} < \frac{1}{r_0};$$

et par conséquent

$$-\left(\frac{dU}{dr}\right)_0 > -\left(\frac{dU}{dr}\right)_1,$$

ce qui veut dire que la fonction U, harmonique dans D_1 et à l'intérieur de L_0, présente sur L_0 une discontinuité correspondant à des «masses génératrices» *positives*.

Cela posé, je dis que la fonction de Green

$$u(D, O')$$

existe; formons en effet par balayages successifs les fonctions

$$u_n(D, O')$$

elles admettent une masse $+1$ en O', et en outre des masses génératrices qui sont toutes négatives. La différence:

$$U - u_n(D, O')$$

n'est plus discontinue en O' et comme en dehors de O' le potentiel U n'admet que des masses positives, et u_n que des masses négatives, la différence $U - u_n$ ne peut avoir que des maxima, et pas des minima; elle est d'ailleurs positive pour tous les points qui n'appartiennent pas aux éléments qu'on a *déjà balayés;* car avant d'obtenir u_n en ces points on a

$$U > 0, \qquad u_n = 0.$$

On a donc dans tout le domaine D

$$U > u_n(D, O'),$$

ce qui veut dire que la suite des u_n, constamment croissante, tend vers une limite finie.

On aurait pu évidemment, avec quelques changements, raisonner de la même manière sans supposer que L_0 est une circonférence, mais cela n'a pas d'intérêt.

Il résulte de là par les raisonnements des § 5, 6, 7, 8 que le domaine D est représentable sur un cercle.

§ 15. Cas où la fonction de Green n'existe pas pour D.

Nous allons maintenant rechercher ce qui se passe quand la fonction V est constamment égale à 1. Reprenons la fonction de Green $u(D_1, 0)$ et supposons encore que L_0 est une circonférence concentrique à C'_0; envisageons la dérivée

$$\frac{du(D_1, 0)}{dr}$$

aux différents points de L_0; nous avons vu au § 12 qu'elle s'y comporte régulièrement; posons:

$$H = \int \frac{du(D_1, 0)}{dr} ds.$$

Elle représente au facteur -2π près, les masses négatives que les balayages ont amenés sur L; la masse négative totale étant -1, on a:

$$H \leq 2\pi.$$

Supposons d'abord

$$H < 2\pi,$$

je dis que dans ce cas V n'est pas constamment égale à 1.

En effet envisageons le domaine d_n limité par L_n et L_0 et imaginons que O fasse partie de ce domaine, ce qui arrivera pourvu que n soit assez grand. Ecrivons simplement u au lieu de $u(D_1, 0)$ et V_n au lieu de $V(d_n)$; nous aurons la formule de Green:

$$\int \left(u \frac{dV_n}{d\nu} - V_n \frac{du}{d\nu} \right) ds = 2\pi V_n^0.$$

Dans cette formule V_n^0 est la valeur de V_n en O; l'intégration est étendue à tous les éléments ds de la frontière d'un domaine contenant O; les dérivées $\frac{d}{d\nu}$ représentent les dérivées estimées suivant la normale à cette frontière, cette normale étant dirigée vers l'extérieur.

Nous pouvons appliquer cette formule au domaine d_n dont la frontière se compose d'un nombre fini d'arcs de cercle, de sorte que toutes nos fonctions s'y comportent régulièrement.

Sur L_0 on a:

$$u = 0, \quad V_n = 1, \quad \frac{du}{d\nu} = -\frac{du}{dr}$$

$$\int_{L_0} \left(u \frac{dV_n}{d\nu} - V_n \frac{du}{d\nu} \right) ds = H.$$

Sur L_n on a:

$$V_n = 0, \; u > 0, \; \frac{dV_n}{d\nu} < 0,$$

$$\int_{L_n} \left(u \frac{dV_n}{d\nu} - V_n \frac{du}{d\nu} \right) ds < 0.$$

On a donc

$$\int_{L_n} + \int_{L_0} = 2\pi V_n^0; \quad \int_{L_n} < 0, \quad \int_{L_0} = H$$

d'où:

$$2\pi V_n^0 < H;$$

on a donc à la limite

$$2\pi V^0 \leq H,$$

V^0 étant la valeur de V au point O, et si $H < 2\pi$

$$V^0 < 1.$$

La fonction V n'est donc pas constamment égale à 1, ce qui permet d'appliquer les démonstrations des deux § précédents et de conclure que D est représentable sur un cercle.

Supposons maintenant $H = 2\pi$.

Dans ce cas, je dis que le domaine D_1 est représentable sur un cercle.

En effet continuons à écrire u au lieu de $u(D_1, 0)$ et déduisons-en les fonctions v et z comme au § 5. Bien que le domaine D_1 ne soit pas simplement connexe, la fonction z sera uniforme, et en effet quand on tourne autour de L_0, v augmente de H, c'est à dire de 2π, z est multiplié par $e^{2i\pi}$ et ne change pas.

A chaque point de D_1, correspond donc un point du plan des z et ce point est situé à l'intérieur du cercle Γ de centre O et de rayon 1. Il faut voir maintenant si la fonction z ne peut pas reprendre plusieurs fois la même valeur.

Reprenons les notations du § 13 en posant:

$$K_n = -\int \frac{dV(d_n)}{dr} ds, \quad K = -\int \frac{dV}{dr} ds,$$

$$W = \frac{2\pi V}{K}, \quad W_n = \frac{2\pi V(d_n)}{K_n},$$

$$Z = e^{-(W + iW')}, \quad Z_n = e^{-(W_n + iW'_n)},$$

W' et W'_n ayant même sens que dans ce § 13.

Les conclusions précédentes subsisteront, c'est à dire que la variable Z_n donnera la représentation conforme du domaine d_n sur un anneau circulaire,

compris entre les deux circonférences concentriques de rayon 1 et $e^{-\frac{2\pi}{K_n}}$. Seulement dans le cas qui nous occupe, K_n qui va constamment en décroissant, tend vers zéro, et on a $K=0$, $V=1$, $W=\infty$. Je dis que K_n va constamment en décroissant avec n; et en effet $V(d_n)$ va constamment en croissant, sauf sur L_0 où elle reste égale à 1; il en résulte que sur L_0

$$-\frac{d(Vd_n)}{dr}$$

et par conséquent K_n vont en décroissant.

Cela posé, considérons $u(d_n, 0)$ comme fonction de Z_n. C'est une fonction harmonique dans l'anneau circulaire $\left(1, e^{-\frac{2\pi}{K_n}}\right)$, sauf au point correspondant à 0 où elle devient logarithmiquement infinie, et qui s'annule sur les deux circonférences qui limitent cet anneau. C'est donc le logarithme du module d'une fonction doublement periodique de 3e espèce par rapport au logarithme de Z_n.

Je précise; considérons un système de fonctions doublement périodiques admettant pour périodes $2i\pi$ et $\frac{4\pi}{K_n}$, de sorte que si $F(\log Z_n)$ est l'une de ces fonctions on ait

$$F(\log Z_n) = F(\log Z_n + 2i\pi) = F\left(\log Z_n + \frac{4\pi}{K_n}\right).$$

Nous pourrions les considérer comme des fonctions de Z_n, mais il vaudra mieux poser

$$Y_n Z_n = e^{-\frac{2\pi}{K_n}}$$

de telle façon que $|Y_n| = 1$ le long de L_0 et $|Y_n| = e^{-\frac{2\pi}{K_n}}$ le long de L_n.

Si nous posons alors:

$$F(\log Z_n) = \Phi(Y_n),$$

nous voyons que Φ est une fonction uniforme de Y_n telle que

$$\Phi(Y_n) = \Phi\left(Y_n e^{\frac{4\pi}{K_n}}\right).$$

Mais si nous posons

$$u(d_n, 0) = \log\left|\Omega(Y_n)\, Y_n^{\lambda}\right|$$

Ω sera une fonction de 3e espèce, c'est à dire que ce sera une fonction uniforme de Y_n satisfaisant à la condition

$$\Omega\left(Y_n e^{\frac{4\pi}{K_n}}\right) = \alpha\,\Omega(Y_n), \quad \alpha e^{\frac{4\lambda\pi}{K_n}} = 1.$$

α et λ sont des constantes. Si Y_n^0 est la valeur de Y_n qui correspond au point O, valeur que nous pouvons toujours supposer réelle puisque l'argument de Y_n n'est déterminé qu'à une constante près, la fonction Ω devient infinie pour

$$Y_n = Y_n^0, \quad Y_n = Y_n^0 e^{\frac{4m\pi}{K_n}} \qquad (m \text{ entier positif ou négatif})$$

et nulle pour

$$Y_n = \frac{1}{Y_n^0}, \quad Y_n = \frac{1}{Y_n^0} e^{\frac{4m\pi}{K_n}}.$$

Elle se réduit à 1, pour $Y_n = 1$, et elle est par là entièrement déterminée par le quotient de deux fonctions Θ.

Il est aisé de voir que si nous posons:

$$H_n = -\int_{L_0} \frac{du(d_n, 0)}{dr} ds$$

on aura $H_n < 2\pi$, $2\pi\lambda = H - H_n = 2\pi - H_n$.

On aura d'ailleurs:

$$\log |Y_n| = -2\pi \frac{1 - V(d_n)}{K_n}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, $1 - V(d_n)$ et K_n tendent vers zéro, mais leur rapport reste limité; je ne sais pas encore s'il tend vers une limite finie.

En effet la fonction harmonique

$$V(d_{n+1}) - V(d_n)$$

est constamment positive, et elle s'annule sur L_0; nous pouvons donc lui appliquer le théorème de Harnack, ce qui nous fournira une limite supérieure et inférieure du rapport

$$\frac{V(d_{n+1}) - V(d_n)}{K_n - K_{n+1}}.$$

Ces limites s'appliqueront au rapport:

$$\frac{V(d_{n+p}) - V(d_n)}{K_n - K_{n+p}}$$

ou en faisant croître p indéfiniment, au rapport

$$\frac{1 - V(d_n)}{K_n}.$$

Ainsi en chaque point du domaine D_1, nous pouvons assigner une limite supérieure à

$$\log \left| \frac{1}{Y_n} \right|,$$

Nous pourrions de même assigner une limite supérieure à ses dérivées: car si V' représente une des dérivées de V, le théorème de HARNACK nous fournira encore une limite supérieure du rapport

$$\frac{V'(d_{n+p}) - V'(d_n)}{V(d_{n+p}) - V(d_n)}.$$

Cela posé nous avons:

$$\log|\Omega| = u(d_n, 0) + \lambda \log\left|\frac{1}{Y_n}\right|.$$

Je dis que quand n croît indéfiniment, $\log|\Omega|$ tend uniformément vers $u(D_1, 0)$; en effet $u(d_n, 0)$ tendant uniformément vers $u(D_1, 0)$, on peut prendre n assez grand pour que

$$u(D_1, 0) - u(d_n, 0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus λ tendant vers 0, et $\log\left|\frac{1}{Y_n}\right|$ restant limité, on peut prendre n assez grand pour que

$$\lambda \log\left|\frac{1}{Y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où

$$u(D_1, 0) - \log|\Omega| < \varepsilon.$$

On démontrerait de même que les dérivées de $\log|\Omega|$ tendent uniformément vers celles de $u(D_1, 0)$, puisque celles de $u(d_n, 0)$ tendent vers $u(D_1, 0)$ et que celles de $\log\left|\frac{1}{Y_n}\right|$ sont limitées.

On en conclura que Ω tend uniformément vers z, et les dérivées de Ω vers celles de z quand n croît indéfiniment.

On verrait que dans le domaine d_n la fonction Ω peut prendre la même valeur *deux fois* au plus. Si alors l'on considère deux points O et M du domaine D, et les valeurs correspondantes Y_n^0 et Y_n de Y_n; nous avons vu que $\log\left|\frac{1}{Y_n^0}\right|$ et $\log\left|\frac{1}{Y_n}\right|$ sont limités; nous pouvons donc assigner une limite inférieure à $|Y_n^0|$ et à $|Y_n|$. Soit alors M' un point du domaine d_n pour lequel Ω reprenne la même valeur qu'au point M, et Y'_n la valeur correspondante de Y_n. On démontrerait, en se servant de l'expression de Ω par les séries Θ, que quand n tend vers l'infini, et par conséquent K_n vers zéro, (Y_n et Y_n^0 restant au dessus d'une certaine limite) Y'_n tend vers zéro, de sorte que le point M' s'éloignera indéfiniment sur le domaine D_1, il ne pourra par exemple rester dans le domaine d_p, où p est un nombre *fixe* plus petit que n. On peut donc prendre n assez grand

pour que l'on soit assuré que $\Omega(Y_n)$ ne prendra pas plus d'une fois la même valeur dans le domaine d_p; mais nous avons vu que $\Omega(Y_n)$ tend uniformément vers z quand n croît indéfiniment (et qu'il en est de même pour les dérivées) donc en répétant le raisonnement du § 13, *on verrait que z ne peut prendre qu'une seule fois la même valeur dans le domaine d_p et par conséquent dans le domaine D_1.*

Ainsi soit C le cercle de centre O et de rayon 1; la fonction z nous donnera la représentation conforme du domaine D_1 sur ce cercle, de telle façon qu'à tout point du domaine corresponde un point du cercle et un seul, et qu'à tout point du cercle ne puisse correspondre plus d'un point du domaine; à un point de L_0 correspondra un point de la circonférence du cercle et réciproquement.

Nous serons ainsi conduits à répartir les points du cercle C en deux ensembles, l'ensemble E des points auxquels correspond un point du domaine, (ensemble dans lequel nous ferons entrer la circonférence dont les points correspondent à ceux de L_0) et l'ensemble E_1 des points auxquels ne correspond aucun point du domaine.

Tous les points de E_1 sont intérieurs à une circonférence, intérieure ellemême à la circonférence de rayon 1. Les points de la frontière de E, sauf ceux de la circonférence de rayon 1, font partie de E_1. La domaine E est doublement connexe, comme D_1 dont il est l'image. Si donc nous considérons une courbe fermée tracée dans E, tous les points de E_1 seront intérieurs à cette courbe ou tous extérieurs.

Deux hypothèses sont donc possibles:

1°. Ou bien E_1 se compose d'un seul point.

2°. Ou bien E_1 en contient une infinité; car si E_1 contient plus d'un point, il ne peut admettre de points isolés.

Soient dans cette 2de hypothèse q, q_1 et q_2 trois points de E_1, le premier sur la frontière de E. Construisons avec ces trois points les fonctions auxiliaires d'Osgood:

$$\varphi(w), \quad t = \log\left|\frac{1}{w}\right|.$$

Cette fonction t est harmonique dans E sauf en O où elle devient logarithmiquement infinie; elle est partout positive et tend vers 0 quand on se rapproche de q. La fonction w est uniforme dans E, parce que toute courbe fermée tracée dans E, n'enveloppe aucun des points singuliers q, q_1, q_2 ou les enveloppe tous trois.

On a donc $t > u(d_n, 0)$ et par conséquent

$$t > u(D_1, 0)$$

ce qui montre que $u(D_1, 0)$ tend vers zéro quand on se rapproche du point q; on en concluerait comme au § 8 que le point q doit se trouver sur la circonférence de rayon 1. Mais il n'en est pas ainsi puisque tous les points de E_1 sont intérieurs à cette circonférence.

Nous sommes donc ramenés à la 1ère hypothèse, d'après laquelle E_1 se réduit à un seul point.

Pour nous résumer, la fonction z donne la représentation conforme de D_1 sur un cercle pointé.

Nous avons donc les deux domaines D_1 et C''_0, qui ont une partie commune δ, et représentables le 1er sur un cercle pointé, le second sur un cercle. Nous pouvons alors, en appliquant les procédés de M. Schwartz (Monatsberichte de l'Académie de Berlin, Octobre 1870, page 792) conclure que le domaine total:

$$D = D_1 + C''_0 - \delta$$

est représentable sur une sphère pointée.

En résumé, un domaine D simplement connexe quelconque est susceptible de représentation conforme soit sur un cercle (§ 13 et 14) *soit une sphère pointée* (§ 15).

Si alors nous nous reportons à la fin du § 12, nous verrons que le 1er cas ne peut être que celui où l'arc $B'A'$ ne se réduit pas à un point et le 2d cas celui où cet arc se réduit à un point. On peut donc donner au critère qui permet de discerner les deux cas plusieurs formes entièrement différentes les unes des autres et différentes aussi de celle qu'avait adoptée M. Brodén.

Revenons pour terminer à notre fonction Y_n; nous avons vu que nous pouvions lui assigner une limite supérieure et une limite inférieure; mais il pourrait encore se faire qu'elle oscille entre ces limites quand n croît indéfiniment au lieu de tendre vers une limite déterminée. Les considérations précédentes montreraient qu'elle tend effectivement vers une limite déterminée qui est:

$$\frac{z - z_0}{z - z'_0} \frac{1 - z'_0}{1 - z_0},$$

z_0 étant l'affixe du point unique auquel se réduit l'ensemble E_1, tandis que z'_0 est le point inverse de z_0 par rapport au cercle C.

SUR LA SOLUTION DU PROBLÈME DE RIEMANN

PAR

L. SCHLESINGER

à KOLOZSVAR.

En poursuivant les recherches que RIEMANN a touché dans son mémoire posthume sur la théorie des équations linéaires,[1] la première tâche que j'avais à remplir était, de démontrer l'existence d'un système de n fonctions d'une variable x, jouissant des propriétés suivantes. Ces fonctions sont holomorphes pour chaque valeur finie de x, à l'exception de σ points donnés arbitrairement $a_1, \ldots, a_\sigma$, et dans ces points singuliers mêmes, aussi bien que pour $x = \infty$, elles ne sont pas indéterminées (au sens de FUCHS[2]). Quand x franchît les coupures (a_ν, ∞) les dites fonctions subissent des substitutions linéaires arbitrairement données

$$\mathfrak{A}_\nu = (\mathfrak{A}_{ik}^{(\nu)}), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$$
$$(i, k = 1, \ldots, n)$$

Le problème de déterminer un tel système de fonctions, que j'avais nommé le *Problème de Riemann*, a été résolu par moi en 1898[3] pour le cas particulier où les racines des équations fondamentales, relatives aux substitutions $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\sigma$ et à la substitution

$$\mathfrak{A}_{\sigma+1} = \mathfrak{A}_1^{-1} \ldots \mathfrak{A}_\sigma^{-1}$$

ont pour modules l'unité, à l'aide des fonctions zéta-fuchsiennes de M. POINCARÉ. Pour le cas général, où ces modules diffèrent de l'unité, l'application des séries zétafuchsiennes devient impossible, puisque dans ce cas ces séries sont divergentes. Plus tard je réussis à démontrer l'existence des fonctions satisfaisant au problème

[1] Voir RIEMANN, Werke (2de édit. 1892), p. 379 et suiv.
[2] Sitzungsberichte 1885, p. 281.
[3] Comptes Rendus, t. CXXVI, p. 723—725.

de RIEMANN en appliquant la *méthode de continuité*, dont MM. KLEIN et POINCARÉ se sont servis pour la démonstration du théorème fondamental de la théorie des fonctions fuchsiennes. Comme ma démonstration se trouve répandu dans plusieurs mémoires,[1] se rapportant pour la plus grande part à des sujets différents du problème mentionné, et comme j'ai réussi dernièrement à simplifier notablement la démonstration d'un théorème auxiliaire, je me permets d'exposer sur les quelques pages qui suivent ma démonstration sous sa forme, pour ainsi dire, définitive. Je remarque que récemment M. HILBERT et quelques-uns de ses disciples[2] ont démontré la possibilité de résoudre le problème de RIEMANN à l'aide de méthodes étrangères à la théorie des équations différentielles linéaires, savoir en appliquant la théorie des équations intégrales de MM. FREDHOLM et HILBERT.

*

1. Soient $\omega_1^{(\nu)}, \ldots, \omega_n^{(\nu)}$ les racines de l'équation fondamentale relative à la substitution $\mathfrak{A}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \sigma+1)$, et supposons, pour simplifier, que ces racines soient tous simples. Formons le système différentiel canonique

$$(A) \qquad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda \sum_{\nu=1}^{\sigma} \frac{A_{\lambda k}^{(\nu)}}{x - a_\nu}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

de manière que les racines des équations déterminantes relatives aux points singuliers a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, \sigma + 1;\ a_{\sigma+1} = \infty)$ soient

$$r_k^{(\nu)} = \frac{\log \omega_k^{(\nu)}}{2\pi\sqrt{-1}}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les déterminations des logarithmes doivent être choisies conformément à la relation

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{\sigma+1} r_k^{(\nu)} = 0 .$$

[1] Comptes Rendus, t. CXXXVIII (1904) p. 955—956; Verhandlungen des III. internat. Mathematiker-Kongresses, (Leipsic, 1905) p. 219—228; Journal de Crelle, t. 130 (1905) p. 26—46; Comptes Rendus, t. CXLII (1906) p. 1031—1033; Mathematische Annalen, t. 63 (1906) p. 273 et suiv.

[2] Voir HILBERT, Verhandlungen des III. internat. Math. Kongresses (Leipsic 1905) p. 233 et suiv.; Göttinger Nachrichten 1905, p. 308; O. D. KELLOG, Mathem. Annalen, t. 60, p. 424 et suiv.; PLEMELJ, Akademischer Anzeiger, Vienne 1906, n:o XIII; c. f. aussi la remarque de M. WIRTINGER, Verhandl. des III. intern. Math. Kongresses, p. 125, 126.

Les constantes $A_{ik}^{(\nu)}$, en nombre de $n^2\sigma$, dépendront alors encore de

$$N = n^2\sigma - n(\sigma + 1) + 1$$

paramètres arbitraires, leur multiplicité que nous allons désigner par M, est donc une multiplicité algébrique à $2N$ dimensions, contenu dans la multiplicité à $2n^2\sigma$ dimensions de $n^2\sigma$ quantités complexes arbitraires. Pareillement les élements $\mathfrak{A}_{ik}^{(\nu)}$ des substitutions $\mathfrak{A}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \sigma)$, dont les équations fondamentales ont pour racines les $\omega_1^{(\nu)}, \ldots, \omega_n^{(\nu)}$ et pour lesquelles la substitution

$$\mathfrak{A}_1^{-1} \ldots \mathfrak{A}_\sigma^{-1}$$

a pour racines de son équation fondamentale les $\omega_1^{(\sigma+1)}, \ldots, \omega_n^{(\sigma+1)}$, forment une multiplicité algébrique $\mathfrak{M}$ à $2N$ dimensions.

À un système différentiel de la forme (A), où l'on regarde comme fixes les points singuliers $a_1, \ldots, a_\sigma$ et les racines des équations déterminantes, corresponde un point de la multiplicité M. Considérons un système fondamental de solutions (une *matrice intégrale*) y_{ik} du système différentiel (A), tel que pour un point régulier x_0 l'on ait:

$$\text{(B)} \qquad \lim_{x=x_0} y_{ii} = 1, \qquad \lim_{x=x_0} y_{ik} = 0 \text{ pour } i \neq k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

cette matrice intégrale va subir des substitutions déterminées lorsque la variable x franchit les coupures $(a_\nu \infty)$. Il s'ensuit qu'à chaque point de la multiplicité M il correspond un point de $\mathfrak{M}$, et un seul. Il s'agit de démontrer qu'inversément, à chaque point de $\mathfrak{M}$ il correspond aussi un point de M.

2. Nous démontrons d'abord qu'à un point de $\mathfrak{M}$ il ne peut correspondre qu'un *seul* point de M.

Soit en effet z_{ik} la matrice intégrale d'un système différentiel de la même forme et au mêmes racines des équations déterminantes que (A), satisfaisant aux mêmes conditions initiales que y_{ik}. Supposons que z_{ik} subit aussi les mêmes substitutions que y_{ik}, lorsque la variable x franchit les coupures $(a_\nu \infty)$. Alors des équations

$$\text{(1)} \qquad z_{ik} = \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda} r_{\lambda k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

on tire les r_{ik} comme fonctions uniformes de la variable x, n'ayant d'autres points singuliers que $a_1, \ldots, a_\sigma, \infty$. Or dans le voisinage de $x = a_\nu$ on a:

$$y_{ik} = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{i\lambda}^{(\nu)} (x - a_\nu)^{r_\lambda^{(\nu)}} \varphi_{\lambda k}^{(\nu)}, \tag{2}$$

les $c_{ik}^{(\nu)}$ étant des constantes, tandis que les $\varphi_{ik}^{(\nu)}$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de a_ν, dont le déterminant ne s'évanouit pas pour $x = a_\nu$. Une représentation analogue subsiste pour $a_{\sigma+1} = \infty$, seulement au lieu de $x - a_\nu$ on doit mettre $\frac{1}{x}$. De même on aura

$$z_{ik} = \sum_{\lambda=1}^{n} c_{i\lambda}^{(\nu)} (x - a_\nu)^{r_\lambda^{(\nu)}} \psi_{\lambda k}^{(\nu)}, \tag{3}$$

où les $\psi_{ik}^{(\nu)}$ sont aussi des fonctions holomorphes au voisinage de $x = a_\nu$. En substituant les valeurs (2) et (3) dans les équations (1), on en tire pour les r_{ik} des développements suivant les puissances entières et positives de $x - a_\nu$; les r_{ik} sont donc holomorphes au voisinage de chacun des points $a_1, \ldots, a_\sigma$ et ∞, d'où 'on conclut, que les r_{ik} se réduisent à des constantes. Mais comme pour $x = x_0$ on a $z_{ik} = y_{ik}$, il s'ensuit que les z_{ik} doivent coïncider avec les y_{ik}. Nous avons donc le *théorème fondamental:*

Il n'y a qu'un seul système différentiel de la forme (A) *pour lequel la matrice intégrale satisfaisant aux conditions initiales* (B), *subit les substitutions* $\mathfrak{A}_\nu$ *lorsque la variable* x *franchit les coupures* $(a_\nu \infty)$, *et pour lequel les racines des équations déterminantes sont fixées.*

3. Selon un théorème de M. Poincaré les coefficients $\mathfrak{A}_{ik}^{(\nu)}$ des substitutions fondamentales, sont des fonctions entières et transcendentes des $A_{ik}^{(\nu)}$:

$$\mathfrak{A}_{ik}^{(\nu)} = \mathfrak{E}_{ik}^{(\nu)}(A_{11}^{(1)}, \ldots, A_{nn}^{(\sigma)}), \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \ldots, n, \\ \nu = 1, 2, \ldots, \sigma \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Si les $A_{ik}^{(\nu)}$ parcourent les points de la multiplicité M, les valeurs correspondantes des fonctions $\mathfrak{E}_{ik}^{(\nu)}$ vont parcourir une multiplicité $\overline{\mathfrak{M}}$, contenue dans la multiplicité $\mathfrak{M}$ définie plus haut. Nous avons deux cas à distinguer:

a) ou la multiplicité $\overline{\mathfrak{M}}$ remplit la multiplicité $\mathfrak{M}$ toute entière,

b) ou $\overline{\mathfrak{M}}$ ne constitue qu'une portion de $\mathfrak{M}$.

Il s'agit de démontrer que le cas b) ne se présente pas.

Remarquons d'abord que M est une multiplicité *fermée*, c'est à dire qu'elle n'a pas de *bord*. En effet selon un théorème de Riemann[1] une multiplicité à m

[1] Werke (1892), p. 481; c. f. Poincaré, Acta Mathematica t. IV, p. 277.

dimensions ne peut être limité que par une multiplicité à $m-1$ dimensions; mais les points limites de M sont nécessairement des points singuliers des fonctions entières $\mathfrak{E}_{ik}^{(\nu)}$, donc pour ces points limites il faut qu'au moins l'une des équations $A_{ik}^{(\nu)} = \infty$ soit satisfaite. Une telle équation complexe équivaut à deux équations réelles, donc l'ensemble S des points limites de M ne peut constituer que des multiplicités à $2N-2$ dimensions au plus, il ne pourra donc former un bord de M. — Pour la même raison, si le cas b) se présentait, il faudrait que les points $\mathfrak{M}$ qui n'appartiennent pas à $\bar{\mathfrak{M}}$ soient séparés des points de $\bar{\mathfrak{M}}$ par une multiplicité Σ à $2N-1$ dimensions. Or considérons un point parcourant la multiplicité $\bar{\mathfrak{M}}$, et suivons le mouvement du point correspondant de M. Si le point de $\mathfrak{M}$ va parvenir à un point de Σ, le point correspondant de M doit parvenir ou à un point de M pour lequel le déterminant fonctionnel des $\mathfrak{E}_{ik}^{(\nu)}$ suivant les $A_{ik}^{(\nu)}$ s'évanouit, ou en un point de S. Le premier cas est impossible, car d'après le théorème fondamental du n:o 2, à un point de $\mathfrak{M}$ ne peut correspondre qu'un seul point de M, c'est à dire que la multiplicité M forme en quelque sorte un »domain fondamental» pour les fonctions entières $\mathfrak{E}_{ik}^{(\nu)}$. Quand au second cas, nous savons que pour les points de S l'une au moins des quantités $A_{ik}^{(\nu)}$ devient infinie. Mais selon un théorème que j'ai démontré,[1] lorsque l'une des quantités $A_{ik}^{(\nu)}$ dévient infinie de telle manière que les racines des équations déterminantes du système (A) ne soient pas altérées, il faut qu'au moins un des éléments des substitutions fondamentales devienne infinie aussi. Donc, lorsque le point de M atteint un point de S, le point correspondant de $\bar{\mathfrak{M}}$ atteindra un point pour lequel au moins une des équations $\mathfrak{A}_{ik}^{(\nu)} = \infty$ sera vérifiée. L'ensemble de ces points formant au plus des multiplicités à $2N-2$ dimensions ne peut donc partager la multiplicité $\mathfrak{M}$, qui a $2N$ dimensions, en deux parties, donc $\bar{\mathfrak{M}}$ ne peut constituer une portion de $\mathfrak{M}$, c'est à dire, que $\bar{\mathfrak{M}}$ coïncide avec la multiplicité $\mathfrak{M}$ toute entière, donc à tout point de $\mathfrak{M}$ correspond un point de M, c. q. f. d.

[1] Voir: Comptes Rendus, t. CXLII (1906), p. 1031—1033 et Mathem. Annalen t. 63, p. 276, 300

SUR UN THÉORÈME DE M. POINCARÉ, RELATIVEMENT AU MOUVEMENT D'UN SOLIDE PESANT

PAR

ED. HUSSON

À RENNES.

Introduction.

1. Parmi les résultats remarquables obtenus par M. POINCARÉ à l'aide des solutions périodiques des équations de la dynamique se trouve le suivant:

Pour qu'il existe, dans le mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe, une intégrale première algébrique ne se réduisant pas à une combinaison des intégrales classiques, il est nécessaire que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension soit de révolution.

La démonstration de M. POINCARÉ suppose que le produit μ du poids du corps solide par la distance du centre de gravité au point de suspension est très petite; cependant on l'étend de suite à toutes les valeurs de μ.

La position du solide étant définie par le système différentiel d'EULER à l'aide des variables habituelles p, q, r, γ, γ', γ'', si on remplace γ, γ', γ'', par $\frac{\lambda}{\mu}\gamma$, $\frac{\lambda}{\mu}\gamma'$, $\frac{\lambda}{\mu}\gamma''$, le système différentiel n'est pas altéré et il dépend du paramètre λ qui s'est simplement substitué à la constante μ.

Si le système différentiel initial admet, pour une valeur numérique particulière de μ, une intégrale algébrique, le système transformé admettra une intégrale algébrique pour toutes les valeurs de λ et en particulier pour λ assez petit, or pour λ assez petit la démonstration de M. POINCARÉ est applicable.

L'extension précédente est au contraire impossible, en général, si les intégrales premières envisagées sont simplement uniformes au lieu d'être algébriques.

2. Je me propose d'indiquer, pour le théorème rappelé, une démonstration indépendante de celle de M. POINCARÉ.

Au point de vue des idées directrices, la méthode employée peut être rapprochée de celles utilisées par M. POINCARÉ dans l'étude du problème des trois corps et par M. PAINLEVÉ dans l'étude des équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme.

Le résultat est établi pour toutes les valeurs du poids du corps pesant, pour toutes les positions du centre de gravité, mais en supposant que les conditions initiales sont quelconques.

Lorsque les conditions initiales sont particulières il se peut qu'il existe une intégrale algébrique nouvelle; M. HESS [1] en a signalé un exemple pour un solide de configuration spéciale, M. STAUDE [2] a mis en évidence l'existence de rotations uniformes autour d'axes invariables dans l'espace pour un solide général.

Transformation préliminaire du système différentiel.

3. Les équations différentielles du mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe O peuvent toujours être ramenés à la forme,

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + y_0\gamma'' - z_0\gamma', & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'',\\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + z_0\gamma - x_0\gamma'', & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma,\\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + x_0\gamma' - y_0\gamma, & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'.
\end{aligned}
\right.
$$

Les axes Ox, Oy, Oz, liés au solide, sont les trois axes de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension, x_0, y_0, z_0, sont les coordonnées du centre de gravité G.

En adoptant la forme précédente des équations différentielles on suppose $\frac{mg}{OG} = 1$, ce qui revient à adopter des unités convenables ou à imaginer que γ, γ', γ'', sont les produits des cosinus directeurs des axes liés au solide avec la direction de la pesanteur par la constante $\frac{mg}{OG}$.

[1] HESS, *Mathematische Annalen* t. 37; NEKRASSOFF, *Mathematische Annalen* t. 47.

[2] STAUDE, *Journal de Crelle* t. 113; KLEIN et SOMMERFELD, *Théorie des Kreisels* t. II; LEVI-CIVITA, *Rendiconti dei Lincei*, 1901 et 1905 et *Prac matematyczno-fizycznych*, (Varsovie) t. 17.

Au lieu de conserver les variables p, q, r, γ, γ', γ'', nous introduirons de nouvelles fonctions choisies de telle façon que les deux premières équations du système (1), par exemple, soient remplacées par deux équations différentielles pour lesquelles les variables soient séparées.

Posons,

$$y_1 = ap + ibq,$$
$$y_2 = ap - ibq,$$

a et b étant deux constantes, i désignant le symbole $\sqrt{-1}$.

Les deux premières équations du système (1) sont remplacées par,

$$\frac{dy_1}{dt} = r\left[\frac{1}{2i}\cdot\frac{B-C}{A}\cdot\frac{a}{b}(y_1 - y_2) + \frac{i}{2}\cdot\frac{C-A}{B}\cdot\frac{b}{a}(y_1 + y_2)\right] + \cdots,$$
$$\frac{dy_2}{dt} = r\left[\frac{1}{2i}\cdot\frac{B-C}{A}\cdot\frac{a}{b}(y_1 - y_2) - \frac{i}{2}\cdot\frac{C-A}{B}\cdot\frac{b}{a}(y_1 + y_2)\right] + \cdots.$$

Ces équations seront respectivement indépendantes de y_2 et y_1 sous la condition unique,

$$\frac{a^2}{A(A-C)} = \frac{b^2}{B(B-C)}.$$

Nous sommes donc amenés à effectuer le changement de fonctions,

$$y_1 = \sqrt{A(A-C)}\,.\,p + i\sqrt{B(B-C)}\,.\,q,$$
$$y_2 = \sqrt{A(A-C)}\,.\,p - i\sqrt{B(B-C)}\,.\,q.$$

Pour que l'on puisse substituer la recherche de y_1 et y_2 à celle de p et q il est évidemment nécessaire et suffisant que les deux relations précédentes permettent de calculer p et q à l'aide de y_1 et y_2, ce qui exige que les deux différences $(A-C)$ et $(B-C)$ soient différentes de zéro.

Pour faciliter les calculs, et, d'une façon plus précise, dans le même but de séparation de variables, nous substituerons à la recherche de γ et γ' celle des deux fonctions,

$$z_1 = \gamma + i\gamma', \qquad z_2 = \gamma - i\gamma'.$$

Enfin pour faire disparaître les imaginaires nous changerons t en $-it$.

Le mouvement du solide pesant sera défini, à l'aide des variables y_1, y_2, z_1, z_2, r et γ'', par le système différentiel,

$$
(2)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt}=-\sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}\cdot ry_1-\left(x_0\sqrt{\frac{B-C}{B}}+iy_0\sqrt{\frac{A-C}{A}}\right)\gamma''+\frac{z_0}{2}\left[\sqrt{\frac{B-C}{B}}\,(z_1+z_2)+\sqrt{\frac{A-C}{A}}\,(z_1-z_2)\right],\\
&\frac{dy_2}{dt}=\sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}\cdot ry_2+\left(x_0\sqrt{\frac{B-C}{B}}-iy_0\sqrt{\frac{A-C}{A}}\right)\gamma''+\frac{z_0}{2}\left[\sqrt{\frac{B-C}{B}}\cdot(z_1+z_2)-\sqrt{\frac{A-C}{A}}\cdot(z_1-z_2)\right],\\
&C\frac{dr}{dt}=\frac{A-B}{4\sqrt{AB\,(A-C)\,(B-C)}}\cdot(y_2^2-y_1^2)-\frac{x_0}{2}(z_1-z_2)+\frac{iy_0}{2}\cdot(z_1+z_2),\\
&\frac{dz_1}{dt}=-rz_1+\frac{1}{2}\left[\frac{y_1+y_2}{\sqrt{A\,(A-C)}}+\frac{y_1-y_2}{\sqrt{B\,(B-C)}}\right]\gamma'',\\
&\frac{dz_2}{dt}=rz_2-\frac{1}{2}\left[\frac{y_1+y_2}{\sqrt{A\,(A-C)}}-\frac{y_1-y_2}{\sqrt{B\,(B-C)}}\right]\gamma'',\\
&\frac{d\gamma''}{dt}=\frac{1}{4\sqrt{A\,(A-C)}}\cdot(y_1+y_2)\,(z_1-z_2)-\frac{1}{4\sqrt{B\,(B-C)}}\cdot(y_1-y_2)\,(z_1+z_2).
\end{aligned}
\right.
$$

Le système (2) admet les trois intégrales premières classiques des forces vives, des aires et des cosinus directeurs. Ces intégrales s'écrivent,

$$\frac{(y_1+y_2)^2}{4\,(A-C)}-\frac{(y_1-y_2)^2}{4\,(B-C)}+Cr^2-[x_0(z_1+z_2)-iy_0(z_1-z_2)+2z_0\gamma'']=\text{const.}$$

$$\frac{A}{2\sqrt{A\,(A-C)}}\cdot(y_1+y_2)\,(z_1+z_2)-\frac{B}{2\sqrt{B\,(B-C)}}\cdot(y_1-y_2)\,(z_1-z_2)+2Cr\gamma''=\text{const.}$$

$$z_1z_2+\gamma''^2=\text{const.}$$

Exposé de la méthode.

4. Pour déterminer les intégrales premières algébriques du système différentiel (2), remplaçons y_1, z_1, z_2, γ'', par λy_1, λz_1, λz_2, $\lambda\gamma''$, sans changer y_2 et r, en désignant par λ un paramètre arbitraire. Nous obtenons le système différentiel,

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt}=-\sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}\cdot ry_1-\left[x_0\sqrt{\frac{B-C}{B}}+iy_0\sqrt{\frac{A-C}{A}}\right]\gamma''+\frac{z_0}{2}\left[\sqrt{\frac{B-C}{B}}(z_1+z_2)+\sqrt{\frac{A-C}{A}}(z_1-z_2)\right],\\
&\frac{dy_2}{dt}=\sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}\cdot ry_2+\left[x_0\sqrt{\frac{B-C}{B}}-iy_0\sqrt{\frac{A-C}{A}}\right]\lambda\gamma''+\lambda\frac{z_0}{2}\left[\sqrt{\frac{B-C}{B}}(z_1+z_2)-\sqrt{\frac{A-C}{A}}(z_1-z_2)\right],\\
&C\frac{dr}{dt}=\frac{A-B}{4\sqrt{AB(A-C)(B-C)}}\cdot(y_2^2-\lambda^2y_1^2)-\frac{\lambda}{2}[x_0(z_1-z_2)-iy_0(z_1+z_2)],
\end{aligned}
\right.
$$

$$(3)\quad\begin{cases}\dfrac{dz_1}{dt}=-rz_1+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\lambda y_1+y_2}{\sqrt{A(A-C)}}+\dfrac{\lambda y_1-y_2}{\sqrt{B(B-C)}}\right]\gamma'',\\[2mm] \dfrac{dz_2}{dt}=\quad rz_2-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\lambda y_1+y_2}{\sqrt{A(A-C)}}-\dfrac{\lambda y_1-y_2}{\sqrt{B(B-C)}}\right]\gamma'',\\[2mm] \dfrac{d\gamma''}{dt}=\dfrac{1}{4\sqrt{A(A-C)}}(\lambda y_1+y_2)(z_1-z_2)-\dfrac{1}{4\sqrt{B(B-C)}}\cdot(\lambda y_1-y_2)(z_1+z_2).\end{cases}$$

Le système (3) admet les intégrales premières algébriques,

$$(4)\quad\begin{cases}\dfrac{(\lambda y_1+y_2)^2}{A-C}-\dfrac{(\lambda y_1-y_2)^2}{B-C}+4Cr^2-4\lambda[x_0(z_1+z_2)-iy_0(z_1-z_2)+2z_0\gamma'']=h_1,\\[2mm] \dfrac{A}{2\sqrt{A(A-C)}}\cdot(\lambda y_1+y_2)(z_1+z_2)-\dfrac{B}{2\sqrt{B(B-C)}}\cdot(\lambda y_1-y_2)(z_1-z_2)+2Cr\gamma''=h_2,\\[2mm] z_1z_2+\gamma''^2=h_3,\end{cases}$$

h_1, h_2, h_3, étant trois constantes arbitraires que *nous pouvons supposer indépendantes de* λ.

5. Les seconds membres des équations (3) sont holomorphes pour $\lambda=0$, par suite pour λ assez petit ces équations admettent, d'après une généralisation du théorème de CAUCHY,[1] une solution développable suivant les puissances croissantes et positives de λ.

Pour déterminer cette solution générale, ou du moins les premiers termes des développements, nous n'introduirons pas le temps t; nous exprimerons y_1, y_2, z_1, z_2, γ'', en fonction de r. Ceci est toujours possible, sauf dans le cas où r est une constante, c'est à dire dans le cas connu de LAGRANGE.

Les relations (4), correspondant aux intégrales premières classiques, donnent y_2, z_1, z_2, en fonction de y_1, γ'', r, et le système différentiel (3) peut être remplacé par un système de deux équations du premier ordre qui déterminent $y_1(r)$ et $\gamma''(r)$. On formerait facilement ce système pour la valeur générale de λ, les valeurs de $\dfrac{dy_1}{dr}$ et $\dfrac{d\gamma''}{dr}$ sont algébriques en h_1, h_2, h_3, λ, y_1, γ'', r, et sont holomorphes pour $\lambda=0$.

6. Soit pour le système (2),

$$f(y_1,\,z_1,\,z_2,\,\gamma'',\,y_2,\,r)=\text{const.}\ldots,$$

une intégrale première algébrique, indépendante du temps, et distincte des intégrales classiques.

[1] POINCARÉ, *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste t. I.*

Le système (3) admet, quel que soit λ, l'intégrale première algébrique et indépendante du temps,

$$f(\lambda y_1,\ \lambda z_1,\ \lambda z_2,\ \lambda\gamma'',\ y_2,\ r) = \text{const.}$$

Si l'on y substitue les expressions de y_2, z_1, z_2, tirées des relations (4), on en déduit que le système des deux équations du premier ordre donnant $y_1(r)$ et $\gamma''(r)$ admet une intégrale première de la forme,

$$F(h_1,\ h_2,\ h_3,\ \lambda,\ y_1,\ \gamma'',\ r) = \text{const.},$$

F étant algébrique par rapport à chacune des lettres h_1, h_2, h_3, λ, y_1, γ'', r.

L'expression F ne peut être indépendante de y_1 et γ'' sinon, ou bien r serait une constante et l'on se trouverait dans le cas de LAGRANGE, ou bien F serait indépendante de y_1, γ'', r, et par suite l'intégrale première f se réduirait à une combinaison algébrique des intégrales classiques.

On peut toujours multiplier l'expression F par une puissance de λ choisie de telle sorte que la fonction F de λ n'admette le point $\lambda = 0$ ni comme zéro ni comme pôle. La fonction algébrique F de λ est alors développable, dans le domaine de la valeur $\lambda = 0$, suivant les puissances croissantes et positives de λ ou de $\lambda^{\frac{1}{p}}$.

Dans ce développement les coefficients des diverses puissances de λ sont des fonctions algébriques de h_1, h_2, h_3, y_1, γ'', r.

Je puis toujours supposer que pour $\lambda = 0$, F ne se réduise pas à une simple fonction de h_1, h_2, h_3.

En effet poussons le développement de F suivant les puissances de $\lambda^{\frac{1}{p}}$ jusqu'au premier terme dont le coefficient ne se réduit pas à une fonction de h_1, h_2, h_3.

Soit,

$$F = \Phi(h_1, h_2, h_3, \lambda) + \lambda^{\frac{k}{p}} F_0(h_1, h_2, h_3, y_1, \gamma'', r) + \lambda^{\frac{k+1}{p}} \cdot F_1(h_1, h_2, h_3, y_1, \gamma'', r) + \cdots.$$

En remplaçant F par la différence,

$$\frac{F - \Phi(h_1,\ h_2,\ h_3,\ \lambda)}{\lambda^{\frac{k}{p}}},$$

ce qui revient à retrancher à l'intégrale première f une fonction algébrique des intégrales classiques, nous voyons que l'on peut toujours supposer que l'on ait,

(5) $$F = F_0(h_1, h_2, h_3, y_1, \gamma'', r) + \lambda^{\frac{1}{p}} F_1(h_1, h_2, h_3, y_1, \gamma'', r) + \cdots = \text{const.},$$

F_0 n'étant pas indépendant de y_1, γ'' et r.

7. Faisons $\lambda = 0$; le système (3) se décompose en les trois systèmes séparés (6), (7), (8),

(6) $$\frac{dy_1}{dt} = -\alpha_0 r y_1 + z_0(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) - \alpha_3 \gamma''$$

(7) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_2}{dt} &= \alpha_0 r y_2 \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{A-B}{4ABC\alpha_0} \cdot y_2^2 \end{aligned} \right.$$

(8) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= -r z_1 + \beta_1 y_2 \gamma'' \\ \frac{dz_2}{dt} &= \quad r z_2 - \beta_2 y_2 \gamma'' \\ 2\frac{d\gamma''}{dt} &= y_2(\beta_2 z_1 - \beta_1 z_2) \end{aligned} \right.$$

α_0, α_1, α_2, α_3, β_1, β_2 étant des constantes dont les valeurs sont,

(9) $$\left\{ \begin{aligned} \alpha_0 &= \sqrt{\frac{(A-C)(B-C)}{AB}}, & \alpha_3 &= x_0\sqrt{\frac{B-C}{B}} + i y_0 \sqrt{\frac{A-C}{A}}, \\ 2\alpha_1 &= \sqrt{\frac{B-C}{B}} + \sqrt{\frac{A-C}{A}}, & 2\alpha_2 &= \sqrt{\frac{B-C}{B}} - \sqrt{\frac{A-C}{A}}, \\ 2\beta_1 &= \frac{1}{\sqrt{A(A-C)}} - \frac{1}{\sqrt{B(B-C)}}, & 2\beta_2 &= \frac{1}{\sqrt{A(A-C)}} + \frac{1}{\sqrt{B(B-C)}}. \end{aligned} \right.$$

En faisant $\lambda = 0$ dans les relations (4), on en déduit que le système des équations différentielles (6), (7), (8), admet les intégrales premières algébriques,

(10) $$\left\{ \begin{aligned} &\frac{B-A}{(A-C)(B-C)} \cdot y_2^2 + 4Cr^2 = h_1 = 4Ca^2, \\ &\frac{1}{\alpha_0}(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) y_2 + 2Cr\gamma'' = h_2, \\ &z_1 z_2 + \gamma''^2 = h_3, \end{aligned} \right.$$

a étant une constante arbitraire remplaçant h_1.

On peut le vérifier d'une façon directe et l'on obtient les relations simples suivantes entre les constantes introduites,

$$
(11) \qquad \begin{cases} C\beta_1 = \alpha_2 \left(\dfrac{1}{\alpha_0} + 1\right), & C\beta_2 = \alpha_1 \left(\dfrac{1}{\alpha_0} - 1\right) \\ \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{B-A}{AB}, & 4\alpha_1 \alpha_2 = C \cdot \dfrac{B-A}{AB}. \end{cases}
$$

8. Dans la suite y_1, y_2, z_1, z_2, γ'', désigneront les solutions du système (6), (7), (8), exprimées à l'aide de r. Ceci est toujours possible si r n'est pas une constante, c'est à dire si A est différent de B.

Comme dans le cas général nous tirons des relations (10) les valeurs de y_2, z_1, z_2, à l'aide de y_1, γ'' et r. Il en résulte d'abord,

$$
\frac{dr}{dt} = \alpha_0 (r^2 - a^2)
$$

et le système (6), (7), (8) peut être remplacé par les deux équations du premier ordre,

$$
(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dr} = \dfrac{\alpha_0 r y_1 + z_0(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) - \alpha_3 \gamma''}{\alpha_0 (r^2 - a^2)} \\ 2\dfrac{d\gamma''}{dr} = \dfrac{y_2(\beta_2 z_1 - \beta_1 z_2)}{\alpha_0(r^2 - a^2)}. \end{cases}
$$

Les seconds membres sont supposés exprimés en fonction de $h_1, h_2, h_3, y_1, \gamma'', r$, à l'aide des relations (10) et dépendent algébriquement de ces grandeurs.

9. En faisant $\lambda = 0$ dans la relation (5) nous en déduisons que le système (12) admet l'intégrale première algébrique

$$
(13) \qquad F_0(h_1,\ h_2,\ h_3,\ y_1,\ \gamma'',\ r) = \text{const.}
$$

F_0 ne peut être indépendant de y_1 et γ'' sinon la fonction $r(t)$ solution du système (6) (7) (8) serait une constante et l'on aurait $A = B$.

L'égalité (13) montre que les fonctions $y_1(r)$, $\gamma''(r)$, solution du système (12), et r, sont liées par une relation algébrique. En exprimant cette propriété, nous obtiendrons des conditions nécessaires d'existence d'une intégrale première algébrique nouvelle pour le système différentiel (1).

Etude des conditions nécessaires.

10. Cherchons à former le système (12) explicitement.

La première des relations (10) donne y_2 en fonction de r et les deux dernières donnent pour z_1 et z_2 des expressions irrationnelles en γ''.

Pour éviter les difficultés résultant de cette irrationnalité, nous introduirons, au lieu de γ'', une fonction auxiliaire choisie de telle sorte que le système différentiel devienne rationnel. Cette substitution est d'ailleurs possible d'une infinité de manières.

La seconde des relations (10) s'écrit,

$$\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = \alpha_0 \cdot \frac{h_2 - 2Cr\gamma''}{y_2}$$

et si nous posons,

$$\alpha_1 z_1 - \alpha_2 z_2 = u$$

nous calculerons de suite z_1 et z_2 à l'aide de u et γ'', et d'une façon rationnelle.

Les deux expressions $u(r)$ et $\gamma''(r)$ sont liées par la relation,

$$\frac{\alpha_0^2}{y_2^2}(h_2^2 - 4Ch_2 r\gamma'' + 4C^2a^2\gamma''^2) - u^2 = 4\alpha_1\alpha_2 h_3$$

déduite de la troisième des relations (10).

Si nous prenons comme nouvelle variable,

$$\alpha_1 z_1 - \alpha_2 z_2 + \frac{\alpha_0}{y_2}\left[2Ca\gamma'' - h_2 \cdot \frac{r}{a}\right] = v, \tag{14}$$

au lieu de γ'', la relation précédente s'écrira

$$\left[v + \frac{\alpha_0 h_2}{a} \cdot \frac{r}{y_2}\right]^2 - \alpha_0^2 h_2^2 \cdot \frac{1}{y_2^2} + 4\alpha_1\alpha_2 h_3 = 4Ca\alpha_0 \cdot \frac{v}{y_2} \cdot \gamma''. \tag{15}$$

Les expressions $\frac{dy_1}{dr}$, $\frac{dv}{dr}$, étant rationnelles en y_1 et γ'', les relations (14) et (15) nous permettront de substituer au système (12) un système différentiel contenant les expressions $y_1(r)$ et $v(r)$ d'une façon rationnelle.

Pour calculer $\frac{dv}{dt}$ on peut utiliser directement la relation (14), mais il est plus simple de remarquer que l'on a,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\alpha_0}{y_2}[2Ca^2\gamma'' - h_2 r],$$

et par suite,

$$v = u + \frac{1}{a} \cdot \frac{du}{dt}.$$

En se servant du système (6) (7) (8) et des relations (11) on obtient immédiatement,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \left(\frac{B-A}{4ABC\alpha_0^2} \cdot y_2^2 + r^2\right)u,$$

ou bien d'après les relations (10),

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 u.$$

Il en résulte, pour définir v, l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} = av,$$

et l'on constate que l'équation,

$$v = 0,$$

est *une équation intégrale* du système (6), (7), (8), ou du système (12).

11. Pour simplifier la première des équations (12) nous introduirons, au lieu de y_1, l'expression,

$$y = y_1 y_2.$$

On a de suite, d'après le système (6), (7)

$$\frac{dy}{dt} = \alpha_0 z_0(h_2 - 2Cr\gamma'') - \alpha_3 y_2 \gamma'',$$

ou bien en remplaçant γ'' en fonction de v,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{h_2}{2Ca^2}\left[\frac{z_0(B-A)}{2AB\alpha_0} y_2^2 - \alpha_3 r y_2\right] - \frac{1}{4Ca\alpha_0}\left[\alpha_3 y_2^2 + 2C\alpha_0 z_0 r y_2\right]\left(v + \frac{h}{v}\right),$$

h étant une constante arbitraire remplaçant h_3 et donnée par l'égalité,

$$h = \frac{A-B}{ABh_1}(h_2^2 - h_1 h_3).$$

Finalement le système (12) est remplacé par le système rationnel simple,

$$
(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{dr} = \dfrac{a}{\alpha_0} \cdot \dfrac{v}{r^2 - a^2}, \\[2ex] \dfrac{dy}{dr} = a_1 + a_2 \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}} + \left(a_3 \alpha_3 + a_4 z_0 \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right) \left(v + \dfrac{h}{v}\right), \end{cases}
$$

a_1, a_2, a_3, a_4 étant des constantes numériques non nulles.

Pour arriver aux équations (16) nous avons supposé essentiellement que les trois différences, $(A - B)$, $(B - C)$, $(C - A)$ sont différentes de zéro.

12. Les fonctions $v(r)$, $y(r)$ s'expriment algébriquement à l'aide de y_1, γ'', r, donc, les nombres A, B, C étant tous distincts, pour qu'il existe une intégrale algébrique nouvelle il est nécessaire que les fonctions $v(r)$, $y(r)$ et r soient liées algébriquement.

Or en intégrant le système (16) on a,

$$
v = k \cdot \left(\frac{r - a}{r + a}\right)^{\frac{1}{2\alpha_0}},
$$

$$
y = a_1 r + a_2 \sqrt{r^2 - a^2} + \int \left(a_3 \alpha_3 + a_4 z_0 \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right) \left(v + \frac{h}{v}\right) dr
$$

k étant une constante arbitraire.

Il en résulte que les fonctions,

$$
w = \left(\frac{r - a}{r + a}\right)^{\frac{1}{2\alpha_0}},
$$

$$
z = \int \left(a_3 \alpha_3 + a_4 z_0 \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right) \left(w + \frac{h'}{w}\right) dr,
$$

h' étant une arbitraire, doivent être liées algébriquement avec la variable indépendante r.

Je dis que cette condition ne peut être satisfaite que lorsque le centre de gravité du solide pesant coïncide avec le point de suspension.

Les trois nombres A, B, C étant distincts, le système différentiel initial est symétrique en p, q, r et nous pouvons toujours supposer que le nombre C est compris entre A et B. Le nombre α_0 est alors imaginaire et la fonction $w(r)$ n'est jamais algébrique.

Il en résulte que $z(r)$ s'exprime algébriquement à l'aide de w et r.

Or les conditions initiales étant arbitraires, la condition précédente est satisfaite quelle que soit la constante arbitraire h' et comme w est indépendante de h', les deux intégrales,

$$J_1 = \int \left(a_3 \alpha_3 + a_4 z_0 \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right) w\, dr,$$

$$J_2 = \int \left(a_3 \alpha_3 + a_4 z_0 \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right) \frac{dr}{w},$$

s'expriment algébriquement à l'aide de r et w.

Considérons un plan sur lequel nous représenterons les valeurs prises par la variable indépendante r et faisons décrire au point représentatif de r un contour fermé très petit entourant le point $r = a$. La fonction w est multipliée par une constante et par suite les intégrales,

$$J'_1 = \int \left(a_3 \alpha_3 - a_4 z_0 \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right) w\, dr$$

$$J'_2 = \int \left(a_3 \alpha_3 - a_4 z_0 \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right) \frac{dr}{w}$$

s'expriment algébriquement à l'aide de r et w.

En comparant à J_1 et J_2 on en déduit que les quatre intégrales,

$$J_3 = \alpha_3 \int w\, dr, \qquad J_4 = \alpha_3 \int \frac{dr}{w},$$

$$J_5 = z_0 \int \frac{rw}{\sqrt{r^2 - a^2}} dr, \qquad J_6 = z_0 \int \frac{r}{w\sqrt{r^2 - a^2}} dr,$$

doivent s'exprimer algébriquement à l'aide de r et w.

Lemme abélien auxiliaire.

13. Lemme. *Soit $P(x)$ une fraction rationnelle, $Q(x)$ un polynome entier en x ou une fraction rationnelle admettant comme pôles simples certains zéros ou pôles de $P(x)$, et,*

$$y(x) = P^{\alpha}, \qquad J(x) = \int \frac{Q}{y} dx,$$

α étant un nombre irrationnel réel ou un nombre imaginaire. Si $J(x)$ s'exprime algébriquement à l'aide de y et x, on a nécessairement,

$$J(x) = \frac{f(x)}{y(x)} + \text{const.} \ldots,$$

$f(x)$ étant une constante ou un polynome entier en x dont le degré surpasse d'une unité le degré de la fraction rationnelle $Q(x)$.

L'intégrale $J(x)$ est évidemment holomorphe pour toute valeur finie de x, distincte d'un zéro ou d'un pôle de P.

Soit $x=a$ un zéro d'ordre m de la fraction rationnelle P.

On a,

$$y(x)=(x-a)^{m\alpha}\,.\,y_1(x)$$

$y_1(x)$ étant holomorphe et différent de zéro pour $x=a$.

La fonction $\dfrac{1}{y_1(x)}$ est aussi holomorphe pour $x=a$, puisque $y_1(a)$ est différent de zéro; on a donc,

$$J(x)=\int\frac{Q(x)}{(x-a)^{m\alpha}}\cdot\frac{dx}{y_1}=\int\frac{1}{(x-a)^{m\alpha+E}}\cdot[b_0+b_1(x-a)+b_2(x-a)^2+\cdots]\,dx,$$

E étant un entier au plus égal à l'unité.

En intégrant,

$$J(x)=\frac{1}{(x-a)^{m\alpha+E-1}}\cdot[b'_0+b'_1(x-a)+b'_2(x-a)^2+\cdots]+C,$$

b'_0, b'_1, b'_2, ... étant des constantes numériques fixées, C une constante arbitraire.

Dans le domaine du point $x=a$, on a d'après l'égalité précédente,

(17) $$y(x)\,.\,J(x)=\varphi(x)+CP^{\alpha},$$

$\varphi(x)$ étant une fonction holomorphe.

Si la fonction $J(x)$ s'exprime algébriquement à l'aide de x et y il en est de même de J augmentée d'une constante.

Il nous suffit donc de considérer la fonction J pour laquelle la constante C introduite par l'intégration dans le domaine du point $x=a$ est nulle.

Le produit $y(x)\,.\,J(x)$ s'exprime algébriquement en x et y.

Soit,

$$y(x)\,.\,J(x)=f(x,y).$$

Dans le domaine du point $x=a$, on a d'après ce qui précède,

(18) $$f(x,y)=\varphi(x)..$$

Considérons un plan sur lequel nous représenterons les valeurs prises par la variable x. Donnons à x une valeur arbitraire x_0 voisine de a, et, faisons décrire au point représentatif de x à partir de x_0 un nombre quelconque de

cercles de centre a; la fonction holomorphe $\varphi(x)$ garde la même valeur et $y(x)$ prend une infinité de valeurs distinctes en progression géométrique. Or si la fonction algébrique $f(x_0, y)$ dépend effectivement de y elle ne peut garder la même valeur que pour un nombre fini de valeurs de y; il faut donc pour que l'égalité (18) soit possible que la fonction f soit indépendante de y, c'est à dire que l'on ait,

$$y(x) \, . \, J(x) = f(x) , \tag{19}$$

f étant une fonction algébrique.

Les seules valeurs finies de x pour lesquelles $f(x)$ peut ne pas être holomorphe sont celles pour lesquelles l'un des deux facteurs y ou J cesse d'être holomorphe. Ces valeurs sont les zéros et les pôles de la fraction rationnelle P, exception étant faite pour le zéro particulier $x = a$.

Soit $x = b$ un autre zéro de la fraction rationnelle P, on a dans le domaine de ce point, d'après l'égalité (17),

$$f(x) = \varphi_1(x) + C_1 P^{\alpha},$$

$\varphi_1(x)$ désignant une fonction holomorphe, C_1 étant une constante d'intégration déterminée.

Comme P^{α} admet le point $x = b$ comme point singulier transcendant, cette dernière égalité exige que la constante C_1 soit nulle.

Si les points $x = a$ ou $x = b$ sont des pôles au lieu d'être des zéros, il suffit dans le calcul initial de changer m en $-m$. On constate que l'égalité (17) est conservée, par suite le résultat que l'on vient de démontrer pour les zéros de P s'étend aux pôles.

La fonction algébrique $f(x)$ est donc holomorphe pour toute valeur finie de x.

Etudions sa nature pour x infiniment grand.

Posons

$$x = \frac{1}{z} \cdot$$

Si les fractions rationnelles P et Q sont respectivement de degrés n et n_1 on aura,

$$y = \frac{1}{z^{n\alpha}} y_2(z), \qquad Q = \frac{1}{z^{n_1}} \cdot y_3(z),$$

y_2 et y_3 étant holomorphes et différents de zéro pour $z = 0$.

On en déduit,

$$J(x) = -\int z^{n\alpha - n_1 - 2} \, . \, (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots) \, dz,$$

ou bien, en intégrant,

$$J(x) = z^{n\alpha - n_1 - 1} . (b'_0 + b'_1 z + b'_2 z^2 + \cdots) + C',$$

b'_0, b'_1, b'_2, ... étant des constantes numériques, C' une constante d'intégration déterminée.

Par suite, on a,

$$f(x) = y(x) . J(x) = \frac{1}{z^{n_1+1}} \psi(z) + C' y_2(z) \cdot \frac{1}{z^{n\alpha}},$$

$\psi(z)$ étant holomorphe et différent de zéro pour $z = 0$.

Comme $z^{n\alpha}$ admet le point $z = 0$ comme point singulier transcendant la constante C' est nécessairement nulle.

Si n_1 est supérieur ou au plus égal à -1, le point à l'infini est un pôle d'ordre $(n_1 + 1)$ de $f(x)$ et comme $f(x)$ est holomorphe pour toute valeur finie de x il en résulte que cette fonction algébrique est un polynome entier en x de degré $(n_1 + 1)$.

Si n_1 est inférieur à -1, le point à l'infini est un zéro pour $f(x)$ et la fonction algébrique $f(x)$ se réduit à un polynome identiquement nul; l'intégrale $J(x)$ ne peut s'exprimer algébriquement à l'aide de y et x.

14. Ce lemme peut être généralisé et appliqué lorsque Q est une fonction rationnelle quelconque.

Dans ce cas il est dabord nécessaire que les résidus du quotient $\frac{Q}{y}$, correspondant aux pôles de Q distincts des zéros et pôles de P, soient nuls; sinon $J(x)$ admettrait des points singuliers transcendants distincts de ceux de la fonction $y(x)$.

Cette condition étant supposée satisfaite, les seules singularités de la fonction $y(x) . J(x)$ seront des pôles connus et il suffira de reprendre la démonstration en considérant le produit $R(x) . y(x) . J(x)$, $R(x)$ étant un polynome connu choisi de façon que ce produit soit holomorphe pour toute valeur de x.

Les conclusions du lemme subsisteront donc, $f(x)$ étant une fraction rationnelle dont le numérateur est de degré déterminé et dont le dénominateur est un polynome connu.

Démonstration de l'impossibilité.

15. Revenons aux intégrales J_3, J_4, J_5, J_6, et exprimons qu'elles se calculent algébriquement à l'aide de r et w.

Si α_3 est différent de zéro, on a nécessairement d'après le lemme démontré,

$$\int \frac{dr}{w} = \frac{br+c}{w} + \text{const.},$$

b et c étant des constantes.

On en déduit en dérivant,

$$\frac{1}{w} = \frac{b}{w} - (br+c) \cdot \frac{w'}{w^2},$$

ou bien,

$$\frac{w'}{w} = \frac{a}{\alpha_0} \cdot \frac{1}{r^2 - a^2} = \frac{b-1}{br+c},$$

relation manifestement impossible.

On a donc,

$$\alpha_3 = x_0 \sqrt{\frac{B-C}{B}} + i y_0 \sqrt{\frac{A-C}{A}} = 0\,.$$

Si l'on reprend la question en échangeant y_1 et y_2 on démontrera de même que l'on a,

$$x_0 \sqrt{\frac{B-C}{B}} - i y_0 \sqrt{\frac{A-C}{A}} = 0$$

et il en résulte, par comparaison,

$$x_0 = y_0 = 0\,.$$

Considérons l'intégrale J_6, on a,

$$J_6 = z_0 \int \frac{r\,dr}{\left(\frac{r-a}{r+a}\right)^{\frac{1}{2\alpha_0}} \cdot (r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = z_0 \int \frac{1}{\left(\frac{r-a}{r+a}\right)^{\frac{1}{2\alpha_0} - \frac{1}{2}}} \cdot \frac{r\,dr}{r-a}.$$

Donc si l'on pose,

$$w_1 = \left(\frac{r-a}{r+a}\right)^{\frac{1}{2\alpha_0} - \frac{1}{2}}$$

et si z_0 est différent de zéro, on a d'après le lemme,

$$\int \frac{1}{w_1} \cdot \frac{r\,dr}{r - a} = \frac{br + c}{w_1} + \text{const.},$$

et en dérivant,

$$\frac{r}{r - a} = b - a\left(\frac{1}{\alpha_0} - 1\right) \cdot \frac{br + c}{r^2 - a^2},$$

ou bien

$$(r + a)[(1 - b)r + ab] = a\left(1 - \frac{1}{\alpha_0}\right)(br + c).$$

On en déduit,

$$b = 1, \; c = a,$$

et il reste,

$$a = a\left(1 - \frac{1}{\alpha_0}\right),$$

ce qui est impossible.

Donc si A, B, C sont distincts il est nécessaire pour qu'il existe une intégrale algébrique distincte des intégrales classiques que l'on ait,

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

ce qui établit le résultat.

16. On peut appliquer les raisonnements et les calculs indiqués à l'étude des conditions ou domaines d'existence des intégrales premières uniformes; la seule difficulté est d'obtenir une représentation précise et complète du domaine d'existence d'une fonction uniforme de plusieurs variables.

On peut aussi lorsque A, B, C, sont distincts, rechercher dans quelles conditions initiales particulières il peut exister une intégrale, algébrique nouvelle. On rencontre de suite les relations possibles correspondant aux cas signalés par M. Hess et par M. Staude.

17. Lorsque l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension est de révolution, c'est à dire lorsque l'on a, par exemple,

$$A = B$$

on sait que Me Kovalevsky a obtenu une quatrième intégrale algébrique, pour un solide de configuration spéciale.

On avait espéré que ce résultat remarquable pouvait être généralisé.

Pour étudier ce problème on peut, d'un grand nombre de manières, introduire un paramètre dans le système différentiel. Tous ces paramètres ne conviennent pas également et l'intérêt d'une démonstration directe du théorème

de M. Poincaré consiste en ce que l'on sépare les procédés qui ne conduisent pas au théorème de M. Poincaré. Quelles que soient les recherches auxiliaires dont on les entoure, ces procédés ne peuvent évidemment être utilisés pour aborder le fond de la question.

Pour $A = B$, les nouvelles variables introduites prennent une forme simple, on peut poser,

$$y_1 = p + iq, \qquad y_2 = p - iq,$$
$$z_1 = \gamma + i\gamma', \qquad z_2 = \gamma - i\gamma',$$

mais pour $\lambda = 0$ r devient une constante, et il semble impossible d'obtenir des conditions nécessaires complémentaires si loin que l'on pousse les développements des solutions du système différentiel suivant les puissances de λ.

La même singularité se présente d'ailleurs si l'on adopte le paramètre μ utilisé par M. Poincaré.

Si l'on remplace y_1, z_1, γ'', par ρy_1, ρz_1, $\rho\gamma''$, en désignant par ρ un paramètre arbitraire, on obtient un nouveau système différentiel holomorphe[1] pour $\rho = 0$.

En développant les solutions suivant les puissances de ρ on arrive, comme je l'ai montré dans un mémoire récent,[2] aux résultats complets suivants:

Les conditions initiales étant supposées arbitraires, les lettres A, B, C, représentant les moments d'inertie ou des nombres positifs quelconques, toute intégrale première algébrique et indépendante du temps du système différentiel définissant le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe est une combinaison algébrique des intégrales classiques.

Il n'y a exception que dans les cas d'Euler, de Lagrange, *et de* Me Kovalevsky.

Lille le 5 juillet 1906.

[1] Lorsque A est différent de B cette propriété est inexacte.

[2] *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1906) et *Thèses présentés à la Faculté des Sciences de Paris* (1905).

SUR LES FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LE PROBLÈME DU CONTINU

PAR

J. KÖNIG.

à BUDAPEST.

2me communication.

Ces quelques pages se rattachent directement aux développements que j'ai donnés sous le même titre il y a quelques mois (Acta, T. 30 pag 329.) Cependant le mode de raisonnement[1] exposé au paragraphe 3 de mon précédent article ne sera pas utilisé ici. Je lui substituerai, pour étayer mes vues demeurées les mêmes, une méthode nouvelle, qui repose essentiellement sur un approfondissement et une généralisation du concept de «définition finie».

Je ferai précéder cette exposition d'une seule remarque de principe. Poser les fondements de la théorie des ensembles, c'est exprimer sous forme explicite, c'est légaliser certains faits qui relèvent de l'intuition interne de notre entendement; en sorte que notre «pensée scientifique» se trouve être elle-même objet de la pensée scientifique. Cette parenté de la théorie des ensembles avec la logique et la doctrine de la connaissance est inéluctable, et elle apparaît déjà dans les éléments de l'arithmétique.

Dans cet ordre d'idées, la logique algébrique, créée à l'imitation des mathématiques, pourra, telle qu'elle est aujourd'hui, nous rendre des services: néanmoins, à elle seule, elle ne nous fera pas triompher des difficultés du problème. Les faits et les principes sur lesquels repose notre pensée scientifique doivent être analysés de plus près qu'ils ne l'ont encore été, et — avant tout — il est nécessaire de créer une discipline, que par analogie avec la «Physique mathématique», je serais tenté d'appeler: Théorie de l'évidence logique.

[1] Ce raisonnement peut et doit être modifié conformément aux nouveaux concepts, qui vont être traités ici.

Je me propose de poursuivre prochainement mes recherches en ce sens dans une publication plus détaillée.

1. Les éléments du continu dont la définition est finie forment un ensemble dénombrable que l'on peut écrire comme il suit, suivant le type ω:

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \ldots,\ a_{1k},\ \ldots)\\(a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \ldots,\ a_{2k},\ \ldots)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(a_{k1},\ a_{k2},\ a_{k3},\ \ldots,\ a_{kk},\ \ldots)\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\qquad\text{(I)}$$

Dans ce tableau, les a_{ik} sont des entiers positifs quelconques, car nous avons défini le continu comme étant l'ensemble des objets

$$(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots),$$

où a_k désigne un entier positif quelconque. A l'aide du tableau (I), — appliquant un procédé semblable au «procédé diagonal» de CANTOR, c'est-à-dire posant

$$a_k = a_{kk} + d, \qquad \text{(II)}$$

— nous pouvons définir un nouvel élément du continu, soit $(a_1,\ a_2,\ \ldots) = a^{(d)}$, où d a une valeur entière positive déterminée. Toutefois la définition de $a^{(d)}$ ne sera exempte de contradiction qu'à la condition que $a^{(d)}$ ne figure pas dans le tableau (I), c'est-à-dire n'ait pas une définition finie. En effet, si $a^{(d)}$ figurait dans (I) (par exemple à la $n^{\text{ième}}$ ligne), l'égalité (II) ne pourrait pas être satisfaite pour $k = n$, puisque l'on devrait avoir à la fois $a_n = a_{nn}$ et $a_n = a_{nn} + d$. Il semble donc que la définition de $a^{(d)}$, définition que nous avons établie en nous servant d'un nombre fini de signes, est une définition contradictoire, partant impossible. Mais, d'autre part, il nous est également impossible d'écarter comme faux le «fait» que nous tirions directement de notre intuition, à savoir qu'à l'aide du «procédé diagonal» nous pouvons réellement former un nouvel élément du continu. Ce paradoxe, si étrange en apparence, va précisément nous permettre d'approfondir d'une manière fondamentale les méthodes logiques qu'il convient d'employer dans la théorie des ensembles. Le *sens* de la méthode du «procédé diagonal» est clair et inattaquable: la contradiction n'apparaît que lorsque nous cherchons à exprimer ce *sens* sous la *forme* d'une définition finie. C'est là ce qui est *impossible*. Si nous pouvions, — sans en modifier le sens, — changer la forme de notre définition, de manière qu'elle ne soit plus une défini-

tion finie, alors nous aurions à faire à une définition véritable et non-contradictoire de l'élément du continu $a^{(d)}$. Ainsi il nous faut, — et il en est fréquemment ainsi; il en est ainsi, à vrai dire, chaque fois que nous précisons notre pensée scientifique sur quelque point essentiel, — il nous faut, dis-je, perfectionner notre «langage». C'est à quoi nous parviendrons de la manière suivante.

A côté des définitions finies, nous introduirons des définitions que nous appellerons «pseudofinies». Ces définitions s'exprimeront par une infinité (dénombrable) de signes (mots, lettres); mais, à partir d'un certain rang n (n nombre ordinal fini), il n'y figurera plus qu'un seul et même signe (N.V.).[1] Pour donner un sens (contenu) à ces définitions, nous dirons: une définition pseudofinie équivant, comme sens, à la définition finie que l'on obtiendrait en supprimant tous les signes (N.V.), c'est-à-dire en se bornant aux n premiers signes. La condition nécessaire et suffisante pour que la suite infinie de signes considérée constitue une définition logique, est que, sans arbitraire et sans contradiction, la suite finie correspondante (que nous appellerons *partie principale* de la définition pseudofinie) définisse (quant à son sens, non nécessairement quant à sa forme) un élément du continu.

Ainsi avec une définition finie, on pourra former différentes définitions pseudofinies: il suffira d'adjoindre (N.V.) un nombre de fois égal à ω, $\omega+1$, $\omega+2$, ... en général à α, en désignant par α un nombre quelconque de la seconde classe de nombres $Z(\aleph_0)$.

2. D'après ce qui précède, il existe des éléments du continu qui, par la partie principale de leur définition, sont sans doute entièrement déterminés, mais dont la définition cependant ne se dégage de toute contradiction que lorsqu'on adjoint à la partie principale finie (H) le signe (N.V) répété ω fois. La définition d'un tel élément sera parfaitement représentée par *l'image* $H(\text{N.V.})^{\omega}$. Mais il faut soigneusement distinguer cette image de la définition proprement dite: car cette dernière, pour être formellement exempte de contradiction, doit comprendre une infinité de signes. L'ensemble des éléments du continu dont la définition est donnée par une image telle que $H(\text{N.V.})^{\omega}$, — en y comprenant même tous les éléments à définition finie, — formera un ensemble dénombrable: en effet, à deux éléments différents correspondent nécessairement des parties principales différentes, et celles-ci constituent un ensemble dénombrable.

L'ensemble dénombrable d'éléments du continu que nous obtenons ainsi, — en y comprenant les éléments à définition finie, — sera représenté, suivant le

[1] (N.V.) = ne varietur.

type ω, par les parties principales à définition finie de ces éléments. Mais, à cet ensemble de type ω, que nous écrirons explicitement sans le forme.

$$\left.\begin{array}{l} (b_{11}, b_{12}, b_{13}, \ldots, b_{1k}, \ldots) \\ (b_{21}, b_{22}, b_{23}, \ldots, b_{2k}, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (b_{k1}, b_{k2}, b_{k3}, \ldots, b_{kk}, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad \text{(III)}$$

nous pouvons de nouveau appliquer le «procédé diagonal». La loi

$$b_k = b_{kk} + d,$$

nous donne de $(b_1, b_2, \ldots) = b^{(d)}$ une définition qui, à son tour, est contradictoire dans sa forme, puisqu'elle est finie. Mais, cette fois, nous ne pouvons plus lever le contradiction en introduisant le signe (N.V.) répété ω fois: car, sous cette nouvelle forme encore, la définition figure dans le tableau (III) à un certain rang n, de sorte que la condition $b_n = b_{nn} + d$ ne saurait être remplie. Si cependant nous introduisons $\omega + 1$ signes (N.V.) ou davantage, nous obtenons une définition exempte de contradiction. En procédant de la même manière, on formerait des suites finies qui ne constitueraient des définitions exemptes de contradiction qu'après adjonction du signe (N.V.) $\omega + 2$ ou $\omega + 3$, etc. fois répété.

Soit alors α le plus petit nombre de la seconde classe de nombres qui jouisse de cette propriété qu'une suite finie donnée de symboles, H constitue une définition non-contradictoire lorsqu'on lui adjoint α *fois* (N.V.): nous dirons que H est *de rang* α. La définition pseudofinie ainsi déterminée sera représentée par

$$H(\text{N.V.})^{\alpha}.$$

Ici encore, bien entendu, cette représentation ne doit pas être prise pour une définition (la definition devrait comprendre une infinité de signes): il ne faut y voir qu'une *image* caractéristique de la définition. Lorsque à un nombre α correspond, comme il a été dit, une partie principale H, nous dirons que α est de *première espèce*. Il en sera ainsi si

$$H(\text{N.V.})^{\alpha}$$

est l'image d'une définition pseudofinie non-contradictoire, tandis que, pour tout α' inférieur à α,

$$H(\text{N.V.})^{\alpha'}$$

présente encore une contradiction formelle.

3. Les considérations qui précèdent nous conduisent finalement à ce résultat que, si l'on était en droit de regarder la deuxième classe de nombres comme un ensemble, c'est à dire comme un composé d'éléments parfaitement séparés et distingués, cet ensemble serait dénombrable. Nous démontrons en effet que, si l'hypothèse était admise: d'une part, les nombres de première espèce seraient dénombrables; d'autre part, tout nombre de la deuxième classe serait de première espèce.

De fait, l'ensemble des suites finies de signes telles que H est dénombrable, et il en est de même, par suite, de l'ensemble des nombres de première espèce, puisqu'à des α différents correspondent par définition des H différents.

Supposons d'autre part que les nombres de la seconde classe ne soient pas tous de première espèce: il existerait alors nécessairement un premier α_0, plus petit que tous les autres, qui ne serait pas de première espèce, tandis que ω, $\omega + 1$, etc. seraient de première espèce. Mais ceci conduit à une contradiction. En effet, les suites finies de signes dont le rang est un nombre de la deuxième classe, sont dénombrables, puisque l'ensemble de toutes les suites finies de signes est lui-même dénombrable: nous pouvons donc les désigner, suivant le type ω, par H_1, H_2, ... Soient α_1, α_2, ... les rangs correspondants. Les définitions pseudofinies

$$H_1(\mathrm{N.V.})^{\alpha_1}, \qquad H_2(\mathrm{N.V.})^{\alpha_2}, \tag{IV}$$

définiront respectivement les éléments du continu

$$\left.\begin{matrix} (a_{11}, a_{12}, \ldots) \\ \cdots\cdots \\ (a_{i1}, a_{i2}, \ldots) \\ \cdots\cdots \end{matrix}\right\} , \tag{IV'}$$

Appliquant à (IV') le «procédé diagonal»,

$$a_k = a_{kk} + d,$$

et désignant par H_0 l'énoncé de ce procédé, nous voyons que la définition

$$H_0(\mathrm{N.V.})^{\alpha_0}$$

sera exempte de contradiction, puisque, par hypothèse, (IV) ne contient aucune définition de la forme $H_0(\mathrm{N.V.})^{\alpha_0}$. Tout α_i inférieur à α_0 figure dans le tableau (IV) et, dès lors, la définition $H_0(\mathrm{N.V.})^{\alpha_i}$ est contradictoire. Il en résulte que H_0 est de rang α_0, c'est à dire que le nombre ordinal transfini α_0 est de première espèce. Ainsi nous sommes bien conduits à une contradiction si nous supposons que la seconde classe de nombres comprend des nombres de seconde espèce.

SUR LES SÉRIES DE MAC-LAURIN À PLUSIEURS VARIABLES

PAR

HENRI DULAC

à Grenoble.

1. La théorie des séries de Taylor et de Mac-Laurin à plusieurs variables présente, dès ses débuts, une importante lacune qui a été signalée par plusieurs mathématiciens.[1] Pour nous borner au cas de deux variables, soit

$$F(x, y) = {}^{(n)}\sum f_n(x, y) \equiv {}^{(n)}\sum (a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \cdots + a_{0,n}y^n) \tag{1}$$

une série de polynomes homogènes. Dans les théories classiques, on sépare chaque terme f_n en ses éléments et l'on considère la serie double:

$$^{(p,q)}\sum a_{p,q}x^p y^q \, . \tag{2}$$

Si cette série (2) converge absolument pour $x = x_0$, $y = y_0$, elle converge absolument dans le domaine $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ et represente dans ce domaine, une fonction analytique et holomorphe de x, y. D'où une suite de conséquences classiques.

Mais si on laisse intacts les termes de la série (1), que peut-on dire sur la convergence d'une telle série et sur la fonction qu'elle représente? En particulier, *si une série* (1) *converge uniformément pour toutes les valeurs réelles de x, y suffisamment petites, converge-t-elle pour les valeurs imaginaires et représente-t-elle une fonction analytique de x, y, holomorphe pour $x = 0$, $y = 0$?*[2]

L'affirmative paraissait très probable; mais il n'en existait pas de démonstration rigoureuse. J'ai pu établir cette démonstration:[3] *une série dont les*

[1] Voir une Note de M. Painlevé (Comptes rendus 2e semestre 1899, p. 27).

[2] En dehors de son intérêt général, la question se pose, ainsi que nous le verrons, dans des applications importantes.

[3] Comptes Rendus: 3 août 1903.

termes sont des polynomes homogènes, à un nombre quelconque de variables, definit une fonction holomorphe dans le voisinage de l'origine, à condition que cette série soit uniformément convergente dans le domaine D formé par l'ensemble des valeurs des variables réelles et voisines de zéro. Ce théorème reste vrai, même en supposant le domaine D bien moins étendu. Par exemple, la série (1) définit une fonction holomorphe pour $x=y=0$, si cette série converge uniformément pour x et y coordonnées des différents points d'un arc de courbe (autre qu'une droite possant par l'origine) tracé dans le plan réel xoy.

2. **Lemme.** *Si un polynome $f(x_1, x_2, \dots x_q)$ homogène ou non, de degré au plus égal à n par rapport à chacune des variables, reste inférieur en module à un nombre M, lorsque les affixes des variables $x_1, x_2, \dots x_q$ occupent, chacune dans son plan, toutes les positions possibles respectivement sur des arcs de courbe $C_1, C_2, \dots C_q$, les coefficients de ce polynome sont inférieurs en module à $M\lambda^n$; λ ne dépend ni des coefficients du polynome, ni de son degré, et ne dépend que des arcs $C_1, C_2, \dots C_q$ considérés.*

Avant d'établir le théorème dans le cas le plus général, je considère les deux cas particuliers suivants: 1° un polynome $f(x)$, de degré n, reste inférieur en module à M, lorsque x est réel et varie entre 0 et 1; 2° le module de $f(x)$ reste inferieur à M lorsque x décrit un arc de courbe C.

1°. Soit $f(x)$ le polynome de degré n. En posant, $x=\cos^2\omega$, on a

$$(1) \qquad f(\cos^2\omega) = b_n \cos 2n\omega + b_{n-1}\cos 2(n-1)\omega + \cdots + \frac{b_0}{2}$$

avec

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos^2\omega)\cos 2p\omega\, d\omega.$$

On a par suite:

$$|b_p| < \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} M\, d\omega, \qquad |b_p| < 2M.$$

D'autre part comme on a

$$\cos 2p\omega = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^{2p} + (\sqrt{x}-\sqrt{x-1})^{2p}}{2},$$

$\cos 2p\omega$ est un polynome en x et la somme des modules des coefficients de ce polynome sera inférieure à

$$\frac{(1+\sqrt{2})^{2p}+(1-\sqrt{2})^{2p}}{2}$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{(3+2\sqrt{2})^{p}+(3-2\sqrt{2})^{p}}{2}.$$

Cette quantité est inférieure à $\frac{6^p}{2}$ car d'après une propriété connue de la somme des puissances de deux nombres dont la somme est constante, on augmente la somme des deux puissances considérés en remplacant $2\sqrt{2}$ par 3.

La relation (1) nous donne $f(x)$ comme une somme de polynomes et nous montre que la somme des coefficients de $f(x)$ sera inférieure à

$$M(6^n+6^{n-1}+\cdots+6+1)=M\frac{6^{n+1}-1}{5}.$$

On reconnait facilement que cette somme est inférieure à $7^n M$.

Chacun des coefficients du polynome $f(x)$ est donc inférieur à $7^n M$.

Au reste la valeur du coefficient numérique élevé à la puissance n n'a pas grande importance pour l'objet que nous avons en vue; l'adoption même d'une limite supérieure telle que $2\times 6^n M$ n'entrainerait aucune modification dans les raisonnements et fournirait au contraire des limites plus avantageuses pour la convergence des séries que nous voulons considérer.

2°. Montrons d'abord que si un point X décrit un arc de courbe C et si on considère q points fixes $A_1, A_2, \ldots A_q$ placés d'une façon quelconque le produit

$$\Pi = XA_1 \cdot XA_2 \cdot \cdots \cdot XA_q$$

prendra nécessairement des valeurs supérieures à ϱ^q; ϱ étant un nombre que nous déterminerons et qui ne dépend que de la forme de l'arc C.

Projettons les points $A_1, A_2, \ldots A_q$ en $A'_1, A'_2, \ldots A'_q$ sur une droite. Un point X de l'arc C se projettera en X' sur un segment C' projection de C. On peut supposer la longeur l' de C' différente de zéro. (Il n'y a qu'à prendre l'axe de projection parallèle à la plus grande corde inscrite dans l'arc C). Le produit Π sera supérieur au produit

$$\Pi' = X'A'_1\times X'A'_2\times\cdots\times X'A'_q.$$

On ne pourra encore que diminuer ce dernier produit si on remplace chacun des points A' qui se trouve en dehors du segment C' par un point placé à celle des extrémités de C' qui est la plus rapprochée de A': nous supposerons donc

que tous les points A' sont situés sur le segment C'. Si nous prenons ensuitet par rapport a une des extrémités de C', la figure homothétique, dans le rapport $\frac{1}{l'}$, de l'ensemble des points de C' et si nous désignons par $b_1, b_2, \ldots b_q, u$, les distances à l'extrémité considérée des homologues des points $A'_1, A'_2, \ldots A'_q, X'$ on a

$$\Pi' = l'^q |u - b_1| \times |u - b_2| \times \cdots \times |u - b_q| = l'^q |\varphi(u)|.$$

Je dis qu'il est absurde de supposer que lorsque u varie entre 0 et 1 le module de $\varphi(u)$ ne prend pas de valeurs supérieures à $\frac{1}{(14)^q}$. En effet s'il en était ainsi, d'après 1° les coefficients de φ seraient inférieurs à $\frac{7^q}{14^q} = \left(\frac{1}{2}\right)^q$. En particulier la somme des racines de φ serait inférieure à $\frac{1}{2}$ et comme toutes les racines sont positives, toutes les racines seraient comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$; $\varphi(u)$ serait alors pour $u = 1$ supérieur à $\left(\frac{1}{2}\right)^q$ ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. Le module de Π' deviendra donc supérieur à $\left(\frac{l'}{14}\right)^q$. On peut toujours trouver un point X_0 tel que le module de Π soit supérieur à $\varrho^q . \left(\varrho = \frac{l'}{14}\right)$.

Ceci posé considérons le polynome $f(x)$ dont les racines sont $a_1, a_2 \ldots a_n$. Soient $A_1, A_2 \ldots A_n$ les affixes de ces racines et X l'affixe de x. Nous supposons que, lorsque X décrit un arc C, le module de $f(x)$ reste inférieur à M. Prenons dans le plan de la variable complexe x et sur l'axe des quantités réelles le segment (S) dont l'origine et l'extrémité ont respectivement pour abcisses 0 et 1; soit t l'abcisse d'un point T de ce segment. Je puis déterminer un nombre l tel que la distance d'un point quelconque de S à un point quelconque de C reste inférieure à l.

Soient $1, 2, 3, \ldots, q$ les indices des racines pour lesquelles la distance XA_i n'est pas constamment supérieure à l, lorsque X parcourt C, tandis que pour les indices $q+1, q+2 \ldots n$, XA_i reste supérieur à l. Pour les racines $a_1, a_2, \ldots a_q$, TA_i reste inférieur à $2l$; en effet soit X_i un point de l'arc C pour lequel on ait $X_iA_i < l$ on a

$$TA_i < TX_i + X_iA_i < 2l.$$

On aura donc

$$Q = \frac{TA_1}{XA_1} \times \frac{TA_2}{XA_2} \times \cdots \times \frac{TA_q}{XA_q} < \frac{(2l)_q}{XA_1 \times XA_2 \times \cdots \times XA_q}$$

et si on prend pour X le point X_0 pour lequel le dénominateur du second membre est supérieur à ϱ^q, on voit que Q sera inférieur à $\left(\frac{2l}{\varrho}\right)^q$. Considérons le produit

$$R = \frac{TA_{q+1}}{XA_{q+1}} \times \frac{TA_{q+2}}{XA_{q+2}} \times \cdots \times \frac{TA_n}{XA_n}.$$

On a pour $i = q + 1,\ q + 2, \ldots n$

$$\frac{TA_i}{XA_i} < \frac{TX + XA_i}{XA_i} = \frac{TX}{XA_i} + 1$$

et comme on a $TX < l$ et $XA_i > l$, le rapport considéré sera inférieur à 2 et R sera inférieur à 2^{n-q}.

En désignant par x_0 la quantité complexe qui a pour affixe X_0 nous aurons:

$$\left|\frac{f(t)}{f(x_0)}\right| \left|\frac{(t-a_1)\,(t-a_2)\ldots(t-a_n)}{(x_0-a_1)\,(x_0-a_2)\ldots(x_0-a_n)}\right| \quad Q \cdot R < \alpha^n,$$

α designant le plus grand des deux nombres 2 et $\frac{2l}{\varrho}$.

Nous aurons donc, pour t variant entre 0 et 1,

$$|f(t)| < |f(x_0)|\,\alpha^n < M\alpha^n.$$

La limite supérieure des coefficients du polynome f sera, d'après 1°, $(7\alpha)^n M$.

3°. Etablissons le theorème dans le cas général. Le module du polynome $f(x_1,\ x_2, \ldots x_q)$ reste inférieur à M lorsque les q variables décrivent, chacune dans son plan, respectivement des arcs $C_1,\ C_2 \ldots C_q$.

Soit n_i le degré du polynome par rapport à x_i et λ_i le nombre défini d'après 2° et tel que les coefficients d'un polynome en x^i restent inférieurs à $M\lambda_i^{n_i}$, si le polynome reste, sur l'arc C_i, de module inférieur à M. Considérons f comme un polynome en x_1 dont les coefficients sont des polynomes en $x_2,\ x_3 \ldots x_q$. Le module de chacun de ces coefficients restera inférieur à $M\lambda_1^{n_1}$. Chacun de ces coefficients étant par rapport à x_2 un polynome de degré au plus egal à n_2, dont les coefficients sont des polynomes en $x_3,\ x_4 \ldots x_q$, le module de chacun de ces nouveaux coefficients sera au plus égal à $M\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}$. En continuant ainsi on arrive à montrer que les coefficients des divers termes de $f(x_1, x_2 \ldots x_q)$ sont inférieurs à $M\lambda_1^{n_1}\lambda_2^{n_2}\ldots\lambda_q^{n_q}$. Les nombres $n_1,\ n_2 \ldots n_q$ étant supposés au plus égaux à n les coefficients de f seront inférieurs à $M(\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots \lambda_q)^n$, car les λ sont supérieurs à un.

3. Théorème. *La série*

(3) $$F = {}^{(n)}\sum f^n(x_1,\ x_2,\ \ldots x_q),$$

dont les termes sont des polynomes homogènes de degré égal à l'indice, définit une fonction holomorphe pour $x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$, *si tous les termes* f_n *de la série restent inférieurs en module à un nombre* M, *lorsque* x_q *ayant une valeur fixe, les affixes de* $x_1,\ x_2,\ \ldots x_{q-1}$ *prennent chacune dans son plan toutes les positions possibles respectivement sur des arcs de courbe* $C_1,\ C_2,\ \ldots C_{q-1}$.

Le degré de f_n par rapport à $x_1,\ x_2,\ \ldots x_{q-1}$ étant au plus égal à n, les coefficients de ce polynome seront d'après le lemme inférieurs en module à $M\lambda^n$. (Certains de ces coefficients seront le produit d'une constante par une puissance de x_q). Soit r le module de la valeur fixe que prend x_q dans notre hypothèse. Les termes des différents polynomes f_n seront inférieurs en module aux termes correspondant du développement, suivant les puissances de $x_1,\ x_2,\ \ldots x_{q-1},\ x_q$, de

$$\frac{Mr}{(1-\lambda x_1)(1-\lambda x_2)\ldots(1-\lambda x_{q-1})(r-\lambda x_q)}.$$

En effet soit $A_{n_1, n_2, \ldots, n_q} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_{q-1}^{n_{q-1}} x_q^{n_q}$ un terme de f_n, on a, d'après le lemme

$$|A_{n_1, n_2, \ldots, n_q}|\, r^{n_q} < M\lambda^n$$

ce qui entraine bien

$$|A_{n_1, n_2, \ldots, n_q} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_{q-1}^{n_{q-1}} x_q^{n_q}| < \frac{M\lambda^n}{r^{n_q}} |x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_{q-1}^{n_{q-1}} x_q^{n_q}|.$$

F définira par suite une fonction analytique de $x_1, x_2, \ldots, x_{q-1}, x_q$, holomorphe pour

$$|x_1| < \frac{1}{\lambda},\ |x_2| < \frac{1}{\lambda} \ldots |x_{q-1}| < \frac{1}{\lambda},\ |x_q| < \frac{r}{\lambda}.$$

4. La méthode qui nous a servi à démontrer le theorème précedent permet d'établir des theorèmes analogues dans des cas où les termes $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ ne sont plus des polynomes homogènes, mais sont soumis à des conditions limitant leur degré. Comme ce sont là des conditions qui se rencontrent peu fréquemment dans les applications, je me bornerai à donner le théorème assez général suivant:

La série

$$F = {}^{(n)}\sum f_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_q)$$

dont les termes sont des polynomes en $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_q$ *définit une fonction holomorphe pour* $x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$, *si les trois hypothèses suivantes sont vérifiées:*

1°. *Les divers termes f_n restent inférieurs en module à un nombre M, si les affixes de $x_1, x_2, \ldots, x_q$ occupent chacune dans son plan toutes les positions possibles respectivement sur des arcs de courbe $C_1, C_2, \ldots, C_q$.*

2°. *n' designant le degré (par rapport à l'ensemble des variables) du terme de degré le plus élevé de f_n et n'' celui du terme de degré le moins élevé, on peut trouver un nombre k tel que l'on ait quel que soit n*

$$n' < kn''.$$

3°. *Si ν designe le degré d'un terme tel que $A_{n_1, n_2, \ldots, n_q} x^{n_1} x^{n_2} \ldots x_q^{n_q}$ et si N est le nombre de termes semblables que l'on rencontre dans les divers polynomes f_n, on peut trouver un nombre positif fixe p tel que l'on ait, quelque soit le terme considéré*

$$N < p^{\nu}.$$

En raisonnant comme dans le cas 3° du lemme, on démontre d'abord qu'un terme $A_{n_1, n_2, \ldots, n_q} x^{n_1} x^{n_2} \ldots x_q^{n_q}$ provenant du polynome f_n est inférieur en module à $M \lambda^{n'} x^{n_1} x^{n_2} \ldots x^{n_q}$. Comme on a

$$n_1 + n_2 \cdots + n_q = \nu \geq n'',$$

on voit que d'après l'hypothèse 2° ce terme sera inférieur en module à

$$M \lambda^{k\nu} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_q^{n_q}.$$

Si nous groupons maintenant ensemble les divers termes semblables que l'on trouve dans les divers polynomes f_n, nous aurons un terme inférieur en module à

$$p^{\nu} M \lambda^{k\nu} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_q^{n_q}.$$

Possons

$$\alpha = p \lambda^k.$$

La série F définira donc une fonction analytique et holomorphe pour

$$|x_i| < \frac{1}{\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

5. En supposant toujours que $x_1, x_2, \ldots, x_q$ varient dans un domaine D représenté géométriquement par un système de courbes $C_1, C_2, \ldots C_q$ tracées dans les plans respectifs des diverses variables, nous pouvons substituer à l'hypothèse: les termes de la série restent dans le domaine D inférieurs à un nombre M, l'hypothèse: on peut trouver deux nombres M et B (B étant en general supérieur

à un) et tels que f_n demeure, quel que soit n, et lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_q$ varient dans D, inférieurs en module à $MB^{n'}$. Il ne résulte de la substitution d'une hypothèse à l'autre qu'une diminution d'étendue du domaine dans lequel la série F définit une fonction holomorphe.

Au reste si la nouvelle hypothèse est verifiée dans le domaine D les termes de la série resteront inferieurs à M, dans un domaine D_1, que nous obtiendrons en prenant dans le plan de chacune des variables l'homothétique de la courbe C correspondante, l'origine étant le centre d'homothétie et le rapport d'homothétie étant $\frac{1}{B}$ ou $\frac{1}{B^k}$, suivant quele polynome est homogène où qu'il satisfait seulement à la condition 2° du théorème du paragraphe 4. De même si nous nous préoccupons seulement du point de vue qualitatif (existence d'un domaine pour lequel la série définit une fonction holomorphe des q variables) et si nous ne nous préoccupons pas du point de vue quantitatif (étendue plus ou moins grande de ce domaine) nous pouvons considérer comme équivalentes les deux hypothèses 1°. Dans le domaine D les termes f_n, de la série restent inférieurs à un nombre M 2°. Dans le domaine D la série est uniformément convergente.

En effet, si la série est uniformément convergente au sens étroit du mot,[1] on peut évidemment trouver un nombre M supérieur au module des divers termes de la série F. D'autre part, si les termes de la série restent inférieurs, dans le domaine D à un nombre M la série sera uniformément convergente dans le domaine D_1, obtenu en prenant, dans leurs plans respectifs, les homothétiques des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_q$, l'origine de chacun de ces plans étant le centre d'homothétie et le rapport d'homothétie étant inférieur à un.

6. D'après ce qui précède, pour que la série

$$F = {}^{(n)}\sum f_n(x,\ y) \tag{1}$$

où f_n est un polynome homogène de degré n définisse une fonction holomorphe pour $x = y = 0$, il suffit que la série converge uniformément dans un domaine D. Ce domaine D peut être constitué par la valeur fixe $y = y_0$ et par les diverses valeurs que prend x lorsque l'affixe de ce point décrit un arc de courbe C, dans le plan de la variable complexe x. En prenant pour y_0 une valeur réelle et pour C un segment de l'axe des quantités réelles, le domaine D sera réel et representé,

[1] On entend par là que, à tout nombre ε donné, on peut faire correspondre un nombre N tel que l'inégalité $n > N$ entraine l'inégalité $|r_n(x_1, x_2, \ldots, x_q)| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_q$ appartenant au domaine D. Par définition on a

$$r_n = F - f_1 - f_2 - \cdots - f_n.$$

dans le plan xoy des variables réelles x et y, par un segment de la droite $y = y_0$. Le domaine D peut aussi être constitué par les valeurs de x et de y coordonnées des divers points d'un arc de courbe $\alpha\beta\gamma$ (autre qu'un segment de droite) tracé dans le plan réel xoy. En effet la série sera uniformément convergente à l'intérieur du secteur $o\alpha\beta\gamma$; elle le sera en particulier pour tous les points d'un segment compris à l'intérieur de ce secteur et placé sur une droite $y = y_0$. On voit également sans peine qu'on peut supposer le domaine D constitué par l'ensemble des valeurs de x et y données par $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, t étant un paramètre réel variant entre t_0 et t_1, φ et ψ étant deux fonctions continues entre t_0 et t_1, l'une au moins des fonctions n'étant pas nulle dans cet intervalle et le quotient $\frac{\varphi}{\psi}$ n'étant pas constant, mais ces deux fonctions pouvant prendre des valeurs imaginaires.

On montrera de même que la série à 3 variables

$$F = {}^{(n)}\sum f_n(x,\ y,\ z)$$

définit une fonction holomorphe pour $x = y = z = 0$, si elle est uniformément convergente pour x, y, z coordonnées réelles d'une portion de surface.

D'une façon générale, la série à q variables definit une fonction holomorphe pour $x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$, si, x_1, x_2, ..., x_q étant les coordonnées d'un point de l'espace à q dimensions, la série converge uniformément sur une portion de surface (autre qu'un plan passant par l'origine).

7. Le théorème général que nous avons démontré fournit des limites assez restreintes du domaine dans lequel la série (1) définit une fonction holomorphe. Dans les questions où il y aurait intérêt à avoir un domaine de convergence holomorphe le plus étendu possible, il y aurait lieu, en appliquant les procédés de démonstration employés, de se servir des hypothèses où on est placé dans chaque cas particulier pour élargir le plus possible ce domaine de convergence. Supposons par exemple que les termes de la série (1) restent inférieurs à M pour x et y coordonnées des différents points *réels* du cercle: $x^2 + y^2 = R^2$.

En posant

$$x = Ru, \quad y = Rv, \quad u = \cos\theta; \quad v = \sin\theta,$$

on a

$$f_n(Ru,\ Rv) = R^n\varphi(u,\ v).$$

Suivant que n est pair ou impair on a

$$\varphi(\cos\omega, \sin\omega) = \frac{a_0}{2} + \sum a_p \cos p\omega + b_p \sin p\omega \qquad (p = 2, 4, 6, \ldots, n)$$

$$\varphi(\cos\omega, \sin\omega) = \sum a_p \cos p\omega + b_p \sin p\omega \qquad (p = 1, 3, 5, \ldots, n).$$

Ce qui dans le cas de n impair, par exemple, peut s'écrire

$$(4)\qquad \varphi(\cos\omega, \sin\omega) = \sum (a_p \cos p\omega + b_p \sin p\omega)(\cos^2\omega + \sin^2\omega)^{\frac{n-p}{2}}.$$

On montre comme dans le lemme que l'on a

$$|a_p| < 2M \qquad |b_p| < 2M.$$

Comme on a

$$\cos p\omega + i \sin p\omega = (u + iv)^p$$

la somme des modules des coefficients de $\cos p\omega$ ou de $\sin p\omega$ considérés comme polynome en u et v sera inférieur à 2^{p-1}. Donc d'après (4) la somme des modules de $\varphi(u, v)$ sera dans le cas de n impair inférieure à

$$2M\left(2^n + 2^{n-1} + \cdots + 2^{\frac{n+1}{2}}\right) = M\left(2^{n+2} - 2^{\frac{n+3}{2}}\right) < 4M\,2^n.$$

On aura la même limite supérieure de la somme des modules dans le cas de n pair. Chacun des coefficients de $f_n(x, y)$ sera donc inférieur à $4M(2R)^n$. Il en résulte que cette série définira une fonction holomorphe pour

$$|x| \leq \frac{R}{2} \qquad |y| < \frac{R}{2}.$$

8. Dans un mémoire sur les équations différentielles du premier ordre[1] M. Poincaré examine le cas où l'origine étant point singulier d'une équation différentielle cette équation est de la forme

$$[y + \varphi_2(x, y)]dy + [x + \psi_2(x, y)]dx = 0.$$

φ_2 et ψ_2 étant des développements suivants les puissances de x et y, commençant par des termes du second degré au moins.

Dans le cas où l'équation aux dérivées partielles correspondante

$$[y + \varphi_2(x, y)]\frac{\partial F}{\partial x} - [x + \psi_2(x, y)]\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

est satisfaite formellement par un developpement

$$F = x^2 + y^2 + f_3(x, y) + f_4(x, y) + \cdots + f_n(x, y) + \cdots,$$

où les f sont des polynomes homogènes de degré égal à l'indice, M. Poincaré démontre que la série dont les termes successifs sont $x^2 + y^2$, f_3, $f_4 \ldots f_n \ldots$ est

[1] Journal de Mathématiques 1885. Théorie des centres

uniformément convergente pour x et y *réels* et suffisamment petits. Ce résultat suffit pour établir sans objection possible, les propriétés bien connues des caractéristiques de l'équation (5) dans le voisinage du point considéré. Mais on pourrait élever des objections si, sans démonstration complémentaire, on voulait appliquer le développement F à l'étude des intégrales *dans le domaine complexe* et si, séparant chaque terme $f_n(x, y)$ en ses élements, on voulait considérer la série double en x et en y.

La démonstration de M. POINCARÉ permet, à vrai dire, de donner pour la série F des conditions de convergence moins restrictives que celles énoncées: F étant toujours considérée comme série *simple* est convergente, si, en posant $x = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \sin \omega$, on a

$$|\varrho \omega| < \alpha \qquad |\varrho| < \beta,$$

α et β étant deux limites faciles à calculer pour une équation différentielle donnée. Mais cela ne suffit pas pour permettre d'employer le développement F à l'étude des intégrales *dans le domaine complexe*. On voit en effet aisément que, si petits qu'on prenne x et y, la démonstration ne permet pas de dire que F converge lorsque $\frac{y}{x}$ est voisin de $+i$ ou de $-i$. Le développement F ne nous permet donc pas de considérer les intégrales pour lesquelles $\frac{y}{x}$ tend vers $+i$ ou $-i$ et en particulier de dire qu'il y a ou non une infinité de pareilles intégrales. En supposant même levée cette restriction relative aux valeurs de $\frac{y}{x}$ voisines de $+i$ et $-i$, et en supposant démontré que F converge pour x et y suffisamment petits, nous ne pouvions pas encore affirmer, sans démonstration, que F définit une fonction analytique, holomorphe pour $x = 0$, $y = 0$. Toutes ces objections sont immédiatement levées par le théorème que nous avons énoncé. La série F, étant uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles de x et y voisines de zéro, définit une fonction holomorphe pour $x = y = 0$.

Les remarques formulées au sujet de la démonstration de M. POINCARÉ peuvent être répétées au sujet de la généralisation remarquable qu'en a donné M. I. BENDIXSON[1] dans le cas d'une équation

$$(6) \qquad [ax + \varphi_2(x, y)] \frac{\partial F}{\partial x} = [by + \psi_2(x, y)] \frac{\partial F}{\partial y}$$

[1] Stockholm, Öfversigt, 1893.

où a et b sont des entiers positifs. C'est pour me débarasser des restrictions relatifs à la convergence d'un développement

$$F = x^b y^a + f_{a+b+1}(x, y) + \cdots + f_{a+b+n}(x, y) \cdots$$

satisfaisant à (6), lorsque ce développement existe, que j'ai indiqué[1] une nouvelle démonstration de la convergence de ce développement.

Ayant rencontré de nouveau les mêmes restrictions dans une démonstration généralisant la théorie des centres[2] pour une équation

$$[Y_n(x, y) + Y_{n+1}(x, y) + \cdots] dy + [X_n(x, y) + X_{n+1}(x, y) + \cdots] dx = 0$$

où les X et les Y sont des polynomes homogènes de degré égal à l'indice, j'ai été amené à établir, pour lever ces restrictions, la théorie développée dans ce mémoire.

[1] Journal de l'École Polytechnique, 1904 page 36.
[2] ib. p. 116.

SUR L'INTÉGRATION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

PAR

EMILE COTTON.

à GRENOBLE.

L'intégration[1] exacte d'un système d'équations différentielles n'étant possible que dans des cas exceptionnels, on est généralement amené en pratique à se contenter de solutions approchées.

Quelle que soit l'origine de ces solutions approchées, on peut en déduire des renseignements sur les solutions exactes, en déterminant un intervalle où celles-ci sont définies, et une gaine entourant la courbe intégrale approchée, où la courbe intégrale exacte reste comprise. C'est là le principal objet de ce Travail.

Voici la méthode suivie. Le procédé d'approximations successives de M. Picard apprend à construire des séries donnant les solutions exactes; on prend comme premiers termes de ces séries les solutions approchées. On sait évaluer une limite supérieure des restes de ces séries quand on néglige les termes d'ordre supérieur à un entier donné n; pour $n = 1$, on a les renseignements demandés.

Afin de les avoir aussi précis que possible, il est bon d'étudier avec soin la convergence des séries; c'est ce que nous avons fait tout d'abord (nos 1—6). Nous sommes ainsi arrivés à perfectionner l'évaluation des restes, en en déterminant des limites supérieures qui sont solutions d'un système Σ d'équations linéaires à coefficients constants et positifs. Ce système se construit à l'aide du système différentiel donné S et des solutions approchées.

Parmi les conséquences de ces résultats, signalons la recherche de conditions suffisantes pour qu'une solution approchée ne diffère de la solution exacte que

[1] Il n'est question, dans cet article, que du domaine réel, et du problème de Cauchy: les données numériques définissant une solution du système différentiel sont relatives à une seule valeur de la variable indépendante.

d'une erreur inférieure à une limite donnée (n° 7). On rattache facilement à cette idée une démonstration de la propriété fondamentale de la méthode de Cauchy-Lipschitz (n°s 8, 9); et, par cela même, les résultats de ce travail permettent d'améliorer l'estimation habituelle des erreurs correspondant aux solutions approchées fournies par cette méthode. Ajoutons qu'en modifiant un peu ce procédé d'approximation, nous avons obtenu une méthode d'intégration graphique (n°s 10—12) qui peut donner d'utiles indications sur l'allure générale des courbes intégrales d'une équation différentielle du premier ordre. Il est à peine besoin de dire que tout ce qui précède a été directement inspiré par les beaux travaux de MM. Picard et Painlevé.

Nous avons enfin (n°s 13, 14), dans le cas d'une équation du premier ordre, appliqué un intéressant théorème de M. Petrovitch à la recherche d'un intervalle où le signe de l'erreur que comporte une solution approchée reste invariable.

1. Soit

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t;\, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t;\, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

un système d'équations différentielles. On veut chercher n fonctions continues de t satisfaisant à ce système et prenant les valeurs $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$ pour $t = t_0$. Nous pouvons, par un changement de la variable t rendre t_0 nul; pour abréger l'écriture, nous supposerons cette condition remplie.

Admettons que l'on connaisse n fonctions $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ qui dans un intervalle[1] $I: 0 \leq t \leq h$, $(h > 0)$, sont définies continues admettent des dérivées continues, sauf peut-être pour des valeurs isolées de t. Pour toute valeur singulière de cette nature, chaque fonction y admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Nous ferons, sur les fonctions $f_i(t;\, x_1, \ldots, x_n)$ les hypothèses suivantes:

On peut déterminer n nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, tels que pour les points $t, x_1, \ldots, x_n$ intérieurs au domaine D défini par les inégalités

$$0 \leq t \leq h, \; y_i(t) - \varepsilon_i \leq x_i \leq y_i(t) + \varepsilon_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

[1] Il n'est question, au cours de ce Travail, que de fonctions et de variables réelles. Cependant, la plupart des résultats pourraient s'étendre au domaine complexe.

les fonctions $f_i(t; x_1, \ldots, x_n)$ sont finies, continues par rapport à t, sauf peut être pour des valeurs isolées de t, et satisfont aux conditions de Lipschitz

(2) $$\left\{ \begin{array}{l} |f_i(t; x'_1, \ldots, x'_n) - f_i(t; x_1, \ldots, x_n)| < b_{i1}|x'_1 - x_1| + \cdots + b_{in}|x'_n - x_n| \\ \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Nous supposerons de plus

(3) $$|y_1(0) - a_1| < \eta_1, \ldots, |y_n(0) - a_n| < \eta_n$$

avec

$$\eta_1 < \varepsilon_1, \ldots, \eta_n < \varepsilon_n.$$

Posons enfin

(4) $$\left|\frac{dy_i}{dt} - f_i(t; y_1, \ldots, y_n)\right| \leq \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Lorsque les nombres η et α sont petits, les conditions (3) et (4) expriment que les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ sons des *solutions approchées* de (1), c'est à dire *satisfont à peu près* aux équations différentielles et aux conditions initiales données.

Appelons m_i un nombre supérieur ou égal à la valeur absolue maximum de la différence $\frac{dy_i}{dt} - f_i(t; x_1, \ldots, x_n)$ pour tous les points de D. On a évidemment

$$m_i < \alpha_i + b_{i1}\varepsilon_1 + \cdots + b_{in}\varepsilon_n.$$

2. Employons la méthode d'approximations successives de M. Picard.[1] Nous prenons toutefois comme premières approximations les fonctions $y_1, \ldots, y_n$ que nous désignerons aussi pour plus de symétrie, par $y_1^0, \ldots, y_n^0$. Nous poserons[2]

(5) $$y_i^{p+1} = a_i + \int_0^t f_i(t; y_1^p, \ldots, y_n^p)\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ p = 0, 1, 2, \ldots).$$

[1] Journal de Mathématiques (1890). Traité d'Analyse t. II.

[2] M. E. Lindelöf a perfectionné la méthode de M. Picard. Dans le Mémoire qu'il a publié à ce sujet, dans le Journal de Mathématiques en 1894, il signale (remarque du nº 3) l'emploi de fonctions continues comme premières approximations. Toutefois l'usage qu'il en fait est différent du nôtre: M. Lindelöf emploie les y_i^0 au lieu des a_i dans les équations telles que (5). Cette différence est essentielle pour la suite.

Un changement de fonctions, utilisé par M. Lindelöf dans un cas particulier (nº 5 du Mémoire précédent), permet de réduire les premières approximations à des constantes et d'identifier les approximations de ce Travail avec celles de MM. Picard et Lindelöf. Aussi, si nous avons repris la démonstration de la convergence de ces approximations, c'est pour obtenir des limites supérieures des restes préférables à celles dont on fait ordinairement usage (voir nº 6).

Nous montrerons qu'il *existe un intervalle* $I': 0 \leq t \leq h' \leq h$, *où les* y_i^p *existent et tendent vers des limites* Y_i *quand* p *croît indéfiniment*. Ces fonctions Y satisfont aux équations et aux conditions initiales données et sont les seules possédant cette propriété.

Les y_i^1 existent dans I, et l'on a

$$u_i^1 = y_i^1 - y_i = a_i - y_i(0) + \int_0^t \left\{ f_i(t; y_1, \ldots, y_n) - \frac{dy_i}{dt} \right\} dt,$$

et par suite,

$$(6) \qquad |u_i^1| \leq \eta_i + \alpha_i t \qquad (i = 1, 2, \ldots; n).$$

Si dans un intervalle $I'': 0 \leq t \leq h''$, et pour $p = r$, les y_i^p existent et les points $t, y_1^p, \ldots, y_n^p$ appartiennent à D, les y_i^{p+1} existent dans le même intervalle et l'on a facilement

$$(7) \qquad \begin{cases} |u_i^{p+1}| \leq \int_0^t b_{i1} |u_1^p| dt + \cdots + \int_0^t b_{in} |u_n^p| dt, \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (p = 1, 2, \ldots, r), \end{cases}$$

en posant

$$u_i^p = y_i^p - y_i^{p-1}.$$

En raisonnant comme pour établir les inégalités (6), on a d'autre part,

$$(8) \qquad |y_i^{p+1} - y_i| \leq \eta_i + m_i t = \varphi_i(t).$$

En prenant h'' inférieur ou égal à h et au plus petit des nombres $\frac{\varepsilon_i - \eta_i}{m_i}$, r est aussi grand que l'on veut, toutes les fonctions y_i^p sont définies pour t compris entre zéro et h'', les points $t, y_1^p, \ldots, y_n^p$ appartiennent, dans les mêmes conditions, au domaine D, et cela quel que soit p.

Mais, quelle que soit la définition de I'', en combinant (6) et (7) on arrive aux inégalités

$$(9) \qquad |u_i^p| \leq \Delta_i^p \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

valables dans l'intervalle I'', où les Δ désignent les polynômes définis par

$$(10) \qquad \begin{cases} \Delta_i^1 = \eta_i + \alpha_i t, \\ \Delta_i^p = \int_0^t b_{i1} \Delta_1^{p-1} dt + \cdots + \int_0^t b_{in} \Delta_n^{p-1} dt. \end{cases}$$

3. Ces polynômes se rencontrent dans l'intégration du système

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = b_{11}z_1 + \cdots + b_{1n}z_n + a_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dz_n}{dt} = b_{n1}z_1 + \cdots + b_{nn}z_n + a_n, \end{cases}$$

ainsi que nous allons le voir. Les solutions de ce système à coefficients constants sont fonctions entières de t; considérons, en particulier, les solutions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ prenant pour $t = 0$ les valeurs $\eta_1, \ldots, \eta_n$ du nº 1. Ecrivons

$$(12)\qquad z_i = \psi_i(t; \eta_1, \ldots, \eta_n; b_{11}, \ldots, b_{nn}; a_1, \ldots, a_n)$$

en mettant en évidence les arbitraires dont dépendent ces fonctions.

Les coefficients des développements des z_i suivant les puissances croissantes de t sont des polynômes à coefficients positifs des variables η_i, b_{ik}, a_i. Par suite, les ψ considérés comme fonctions de toutes les variables t, η, b, a sont développables en séries entières à coefficients positifs. Groupant les termes de même degré par rapport aux variables b_{ik}, on a des séries de polynomes

$$z_i = \psi_i(t; \eta; b; a) = \Delta_i^1 + \Delta_i^2 + \cdots + \Delta_i^p + \cdots.$$

Les polynômes Δ_i^p homogènes et de degré $p - 1$ par rapport aux lettres b_{ik} *sont identiques à ceux que nous avons rencontrés au nº précédent;* nous admettons ce point facile à établir.

Lorsque les variables t, η, b, a *sont positives, les* ψ *le sont aussi et croissent en même temps que ces variables.* Si les η et les a sont nuls, les ψ le sont également.

Dans l'intervalle I'', les séries

$$(13)\qquad Y_i = y_i + u_i^1 + \cdots + u_i^{p-1} + \cdots$$

sont uniformément convergentes, on voit aisément qu'il en est de même des séries obtenues en dérivant une fois terme à terme. On en conclut que *les fonctions* Y *satisfont au système* (1) *et aux conditions initiales.*

On peut donner une autre évaluation de l'intervalle de convergence I''.

Les fonctions ψ_i, croissant avec t, devenant infinies positives en même temps que t, partant des valeurs $\eta_i < \varepsilon_i$ pour $t = 0$, chacune des équations

$$(14)\qquad \psi_i(t) = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

admet une racine positive et une seule. Soit θ la plus petite de ces racines, et h_1'' *un nombre positif inférieur à θ et à h.*

Dans l'intervalle $I_1'' : 0 \leq t \leq h_1''$, on a, quelque soit p,

$$\Delta_i^1 + \Delta_i^2 + \cdots + \Delta_i^p < \varepsilon_i. \tag{15}$$

Ces inégalités, pour $p = 1$, montrent que les hypothèses du n° 2 sont vérifiées pour I_1'' et $r = 1$. En vertu de

$$y_i^2 - y_i = u_i^1 + u_i^2,$$

et des inégalités (9) et (15), il en est de même pour $r = 2$. On voit, en répetant le raisonnement, que ces hypothèses sont vérifiées pour toutes les valeurs de r.

Dans l'intervalle I_1'', les fonctions y_i^p sont définies, les séries (13) convergent et satisfont aux équations (1).

On prendra donc comme intervalle I' (énoncé du n° 2) *le plus grand des intervalles I'', I_1''.*

Il reste à voir qu'il ne peut exister un système de solutions continues $x_1, \ldots, x_n$ distinct de $Y_1, \ldots, Y_n$, prenant pour $t = 0$ les valeurs $a_1, \ldots, a_n$. Pour un pareil système, on aurait, dans un certain intervalle $0 \leq t < t_1$ intérieur à I',

$$\begin{cases} |y_i - x_i| < \varepsilon_i \\ |y_i^p - x_i| < \int_0^t b_{i1} |y_1^{p-1} - x_1| dt + \cdots + \int_0^t b_{in} |y_n^{p-1} - x_n| dt, \end{cases} \tag{16}$$

comme on s'en assure en tenant compte de la continuité des fonctions x. On passe des inégalités (6) et (7) aux inégalités (16) en faisant $\alpha_i = 0$, $\eta_i = \varepsilon_i$. Les inégalités (16) entraînent donc

$$|y_i^p - x_i| < \overline{\Delta_i^p},$$

en appelant $\overline{\Delta_i^p}$ ce que devient Δ_i^p lorsque les α sont nuls et les η égaux aux ε de même indice. Or $\overline{\Delta_i^p}$ tendant vers zéro quand p croît indéfiniment, x_i est la limite de y_i^p et se confond avec Y_i, comme il fallait l'établir.[1]

---

[1] Les raisonnement des n°s 2 et 3 sont une extension de ceux de M. Lindelöf (Journal de Mathématiques 1894). Pour retrouver les résultats de ce géomètre, nous supposerons $y_1 = a_1, \ldots, y_n = a_n$ (les η sont alors nuls), nous remplacerons les α par le plus grand d'entr'eux que nous appellerons M_0, les ε par le plus petit d'entr'eux soit b, et enfin les m_i par le plus grand d'entr'eux appelé M. De même, pour toutes les valeurs de p, remplaçons $b_{1p}, b_{2p}, \ldots, b_{np}$

4. En résumé, *étant donné un système* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *de solutions approchées des équations* (1), *nous pouvons en déduire les renseignements suivants sur le système* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *de solutions cherché:*

1°. *Les solutions exactes sont définies dans tout l'intervalle* I'.

2°. *Les erreurs* $x_i - y_i$ *que comportent les solutions approchées sont inférieures en valeur absolue aux fonctions* $\varphi_i(t)$ *et* $\psi_i(t)$ *de même indice.*

Des deux systèmes $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ de fonctions limites des erreurs le second sera le plus utile au point de vue théorique parce qu'il ne fait intervenir que les limites des erreurs sur les données initiales et sur les équations, les η et les α.

5. Voici deux cas particuliers importants, connus du reste.

Si l'on prend comme solutions approchées des solutions de (1) ne satisfaisant pas aux conditions initiales, nous avons $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$; les fonctions $\Psi(t; \eta; b; 0)$ donnent des limites des erreurs commises; elles tendent vers zéro en même temps que les nombres η, par suite *les intégrales du système* (1) *sont fonctions continues des données initiales.*[1]

Plus généralement, supposons que les f et les a soient fonctions de certains paramètres μ, continues au voisinage des valeurs $\mu = 0$, les intégrales $x(\mu)$ des équations (1) déterminées par les valeurs initiales a, sont aussi fonctions continues de ces paramètres. Leurs limites, pour $\mu = 0$, satisfont aux équations (1') et aux données initiales a' correspondant à $\mu = 0$.[2] On le voit en prenant les solutions de (1') satisfaisant aux données initiales a' comme solutions approchées des équations (1) et des données a correspondant à des petites valeurs des paramètres μ. Les η et les α tendent vers zéro en même temps que les paramètres μ, et il en est de même des fonctions $\psi(t; \eta; b; \alpha)$.

6. La précision des renseignements précédents (n° 4) croît lorsque les erreurs sur les équations et sur les valeurs initiales étant estimées d'une façon plus étroite, on substitue aux nombres α et η des nombres analogues mais plus petits. Il est également utile de prendre les coefficients b des inégalités de Lipschitz aussi petits que possible.

par le plus grand d'entr'eux soit k_p. Alors les nombres $\frac{\varepsilon_i - \eta_i}{m_i}$ du n° 2 deviennent tous égaux à $\frac{b}{M}$; et les intégrales de (11) se réduisant à $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = \frac{M_0}{K}(e^{Kt} - 1)$ où $K = k_1 + \ldots + k_n$, les équations (14) ont pour racine $\frac{1}{K} \log \left(1 + \frac{Kb}{M_0}\right)$.

[1] Voir Picard, Traite d'Analyse t. II.

[2] M. Picard et Lindelof ont démontré par la méthode des approximations successives la proposition plus précise de M. Poincaré, concernant les systèmes de cette nature lorsque les équations et les données sont analytiques.

Par exemple, si certaines équations sont exactement vérifiées par les solutions approchées, les nombres α correspondant à ces équations seront nuls. Ce cas se présente fréquemment dans l'intégration approchée des équations d'ordre supérieur.

Prenons pour fixer les idées, l'équation du pendule simple. Elle est équivalente au système

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x' \\ \dfrac{dx'}{dt} = -k^2 \sin x. \end{cases}$$

Prenons comme première approximation

$$y = \frac{v}{k} \sin kt \qquad y' = v \cos kt,$$

en supposant les conditions initiales exactement remplies et la vitesse initiale v assez petite. Nous prendrons pour système (11) correspondant à (17) les équations suivantes

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{dZ}{dt} = Z' \\ \dfrac{dZ'}{dt} = k^2 Z + \alpha, \end{cases}$$

où α peut être supposé égal à $\frac{v^3}{6k}$. Ce système (18) est équivalent à

$$(19) \qquad \frac{d^2 Z}{dt^2} = k^2 Z + \alpha.$$

En appliquant ce qui précède, on prend les η nuls, et l'on a, pour t assez petit,

$$(20) \qquad |y - x| < Z_1 = \frac{\alpha}{k^2}\left[\frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} - 1\right].$$

La méthode habituelle [voir la note (1) de la page (112)], donne

$$(21) \qquad |y - x| < Z_2 < \frac{\alpha}{1 + k^2}\left[e^{(1+k^2)t} - 1\right].$$

résultat moins avantageux que le précédent.

Il est intéressant de noter que, dans les applications des résultats indiqués au n° 4 aux problèmes de Mécanique, *les inégalités auxquelles on parvient satisfont d'elles-mêmes aux lois de l'homogénéité.* Il en est autrement si, comme d'habitude, on

suppose $b_{1p} = b_{2p} = \cdots = b_{np}$; il faut alors mettre en évidence les unités choisies pour faire apparaitre l'homogénéité. Cela est manifeste dans les inégalités (20) et (21). Le même exemple nous a permis d'appliquer la remarque que voici.

Soit S un système d'équations différentielles comprenant des équations d'ordre supérieur à un. Au lieu de ramener S à un système S' du premier ordre et de construire le système (11) correspondant à S', on peut former directement un système linéaire Σ déterminant des limites supérieures des erreurs que comportent les solutions approchées. A chaque équation de S en correspond une de Σ, du même ordre, que l'on forme avec les coefficients de l'inégalité de LIPSCHITZ et du nombre α correspondant à cette équation.[1]

Remarquons enfin que *les raisonnements* des n°s 2 et 3 *subsistent si l'on suppose que les inégalités* (2), *etc.... dépendent de t, c'est à dire que les b, les a, et les m sont fonctions positives ou nulles de la variable t.*

Aux fonctions $\varphi_i(t)$ correspondent les fonctions analogues

$$\bar{\varphi}_i(t) = r_i + \int_0^t m_i dt,$$

et, de même, aux fonctions $\psi_i(t)$ correspondent les intégrales $\psi_i(t)$, d'un système lineaire analogue à (11), mais à coefficients variables. On pourrait aussi substituer aux constantes ε_i des fonctions ε_i, positives, de la variable t.

7. La théorie des erreurs donne, pour les calculs algébriques, la solution de deux problèmes. 1° Estimer l'approximation du résultat d'un calcul, quand on substitue aux nombres et aux opérations exacts, des nombres et des opérations comportant des approximations connues. 2° On veut obtenir un résultat avec une approximation fixée à l'avance, avec quelles approximations suffit-il de connaître les données et d'effectuer les opérations?

On peut se poser deux questions analogues pour les équations différentielles. Le n° 4 répond à la première: Sachant que des fonctions satisfont à peu près aux conditions initiales et aux équations différentielles (des limites supérieures des erreurs correspondantes étant supposées connues), estimer l'erreur que ces fonctions présentent par rapport aux solutions exactes.

Abordons maintenant la seconde question.

Trouver des conditions suffisantes pour que des solutions approchées d'un système d'équations différentielles ne présentent, par rapport aux solutions exactes, que des erreurs inférieures, en valeur absolue, à des nombres donnés. Nous serons toute-

[1] Comptes Rendus 17 juillet 1905. Au sujet du système Σ [système (11)] voir le n° 13.

fois obligés de faire des hypothèses concernant l'existence des solutions exactes. Nous énoncerons d'abord ces hypothèses, et ramènerons ensuite la seconde question à la première par un artifice dû à M. SEVERINI.[1]

Nous supposons que les équations (1) admettent un système de solutions $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, satisfaisant aux conditions suivantes.

Elles sont définies et continues dans l'intervalle I $0 \leq t \leq h$, prennent pour $t = 0$ les valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, admettent dans I des dérivées premières continues.

Il existe des nombres positifs ε_i tels que dans le domaine D défini par

$$0 \leq t \leq h, \; x_i(t) - \varepsilon_i \leq Y_i \leq x_i(t) + \varepsilon_i,$$

les fonctions $f_i(t, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ sont continues et satisfont aux conditions de LIPSCHITZ obtenues en substituant $Y_1, \ldots, Y_n, Y'_1, \ldots, Y'_n$ à $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$ dans les inégalités (2).

Soient alors $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_n(t)$ des fonctions de t, qui, tant que le point $t, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ne sort pas du domaine D, sont continues, admettent des dérivées premières finies et continues (sauf peut être pour des valeurs isolées de t); et qui prennent pour $t = 0$ des valeurs satisfaisant aux inégalités

$$|a_i - y_i(0)| \leq \eta_i < \varepsilon_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Considérons alors, avec M. SEVERINI le système

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dY_i}{dt} = f_i(t;\, Y_1, \ldots, Y_n) + \left[\frac{dy_i}{dt} - f_i(t;\, y_1, \ldots, y_n)\right] = F_i(t;\, Y_1, \ldots, Y_n) \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \right.$$

On doit supposer que, dans les crochets, les y sont remplacés par les fonctions précédentes.

Dans D, les fonctions F satisfont aux mêmes conditions de continuité que les fonctions f, et vérifient les mêmes inégalités de LIPSCHITZ. Les $y(t)$ satisfont au système (22); les $x(t)$ sont solutions approchées du même système, et nous pouvons appliquer les résultats du n° 4. Posons

$$\alpha_i \geq \left|\frac{dy_i}{dt} - f_i(t;\, y_1, \ldots, y_n)\right| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

[1] Rendiconti del R. Ist. Lomb. di Sc. e lett. Serie II, Vol. 31, 1898, p. 951. L'artifice consiste à former le système (22) dont les $x(t)$ sont des solutions approchées; les y des solutions exactes. Ce point mis à part, M. SEVERINI traite la question posée dans le texte d'une façon différente de la nôtre.

ces inégalités ayant lieu pour les points t, $y_1, \ldots, y_n$ intérieurs à D; et considérons les fonctions $\psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha)$ du nº 3. Si l'on peut construire les y de telles façon que les η et les α soient assez petits pour que

$$\psi_i(h;\ \eta;\ b;\ \alpha) < \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

on aura, dans tout l'intervalle I,

$$|y_i - x_i| < \psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha) < \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Regardons maintenant les y comme solutions approchées du système (1), dont les x sont solutions exactes. Nous voyons que

Pour que des fonctions ne présentent par rapport aux solutions exactes d'un système d'équations différentielles que des erreurs inférieures, en valeur absolue, à des nombres donnés, il suffit qu'elles soient assez près de satisfaire aux équations et aux conditions initiales.[1]

8. Nous rattacherons facilement à cette idée générale, *la propriété fondamentale de la méthode de* CAUCHY-LIPSCHITZ, *celle de fournir une approximation uniforme des intégrales dans tout leur domaine d'existence et de régularité.* Cette propriété a été mise en évidence par les beaux travaux de MM. PICARD et PAINLEVÉ.[2]

Les hypothèses sur les intégrales x du système (1) et les fonctions f, étant les mêmes qu'au nº précédent, la méthode de CAUCHY LIPSCHITZ donne le moyen suivant de construire des fonctions y. On divise l'intervalle I, en intervalles partiels par des valeurs croissantes de t, soit

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s < t_{s+1} = h.$$

Prenons, pour simplifier, $y_i(0) = a_i$, donc $\eta_i = 0$; et soit *pour t compris entre t_{p-1} et t_p,*

$$(23) \qquad \begin{cases} y_i(t) = y_i(t_{p-1}) + (t - t_{p-1}) f_i[t_{p-1};\ y_1(t_{p-1}), \ldots, y_n(t_{p-1})] \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Les y ainsi construits de proche en proche, satisfont aux conditions du nº précédent, en ce qui concerne la continuité et l'existence des dérivées.

Montrons que les nombres α_i peuvent être pris aussi petits que l'on veut, par une subdivision convenable de l'intervalle I.

[1] M. RUNGE (Mathematische Annalen, t. 44, p. 437) a traité une question analogue en utilisant la méthode de CAUCHY-LIPSCHITZ.

[2] PICARD. Comptes-Rendus, juin 1899. Traité d'Analyse 2e édition.

PAINLEVÉ. Comptes-Rendus, juin 1899. Bulletin de la Société Mathématique de France 1899.

L'exposé très net de cette méthode que M. GOURSAT a donné dans son Traité d'Analyse nous a été fort utile.

Dans l'intervalle partiel (t_{p-1}, t_p), on doit avoir[1]

$$(24)\quad \alpha_i \geq \left|\frac{dy_i}{dt} - f_i(t;\ y_1, \ldots, y_n)\right| = \left| f_i[t_{p-1}, y_1(t_{p-1}), \ldots, y_n(t_{p-1})] - f_i(t;\ y_1, \ldots, y_n)\right|$$

Les fonctions f étant continues dans D, on peut trouver des nombres $l(\alpha)$ et $\lambda_s(\alpha)$ tels que les $n+1$ inégalités

$$(25)\qquad |t - t_{p-1}| < l(\alpha),\ |y_s - y_s(t_{p-1})| < \lambda_s(\alpha)$$

entraînent les précédentes Or, en désignant par $m_1, \ldots, m_n$ des nombres supérieurs ou égaux aux valeurs absolues maxima des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ dans le domaine D, il suffit de prendre les intervalles (t_{p-1}, t_p) d'étendue inférieure à $\delta(\alpha)$, $\delta(\alpha)$ désignant le plus petit des nombres $l(\alpha)$, $\frac{\lambda_s(\alpha)}{m_s}$ pour que les inégalités (25) soient satisfaites.[2] Il en sera alors de même des inégalités (24). La proposition énoncée résulte alors du n° précédent.

Les remarques faites antérieurement (n° 6) sur le choix des coefficients b des inégalités de Lipschitz seraient importantes pour une application pratique de la méthode précédente. D'ailleurs, pour un calcul numérique de solutions par cette méthode, il vaudrait mieux substituer à la détermination faite ci-dessus des intervalles partiels, une détermination fondée sur l'étude directe des fonctions suivantes de t

$$|f_i[t_{p-1},\ y_1(t_{p-1}), \ldots, y_n(t_{p-1})] - f_i(t;\ y_1, \ldots, y_n)|.$$

(Les y sont supposés remplacés par leurs expressions (23)). En supposant t_{p-1} connu, on choisira t_p de façon que dans l'intervalle (t_{p-1}, t_p) on ait les inégalités (24), cet intervalle étant pris du reste aussi grand que possible.

9. Reprenons les notations et les hypothèses du n° 7. Nous supposons que l'on connait les solutions approchées $y_i(t)$ des équations (1) satisfaisant aux conditions énoncées à cet endroit. Nous allons établir que *l'on peut appliquer la méthode de* M. Picard *pour déduire les solutions exactes $x(t)$ des solutions appro-*

[1] Dans une application numérique, on ne saurait en général calculer exactement l'expression $f_i[t_{p-1}, y_1(t_{p-1}), \ldots, y_n(t_{p-1})]$. Mais il suffit de la calculer à $\theta\alpha_i$ près, $(0 < \theta < 1)$ et de remplacer α_i par $(1-\theta)\alpha_i$ dans la détermination de δ.

[2] Si les fonctions $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ satisfont aux inégalités complètes de Lipschitz

$$|f_i(t;\ y_1, \ldots, y_n) - f_i(t';\ y'_1, \ldots, y'_n)| < b_i|t-t'| + b_{i1}|y_1 - y'_1| + \cdots + b_{in}|y_n - y'_n|,$$

dès que la droite joignant les points $t, y_1, \ldots, y_n$ et $t', y'_1, \ldots, y'_n$ est intérieure à D, on prendra pour $\delta(\alpha)$ les plus petits des nombres $\frac{\alpha_i}{b_i + b_{i1}m_1 + \cdots + b_{in}m_n}$.

chées $y(t)$.[1] Une démonstration spéciale est nécessaire, car le domaine du nº 7 est distinct de celui du nº I.

En posant $y_i^0 = y_i$, et

$$y_i^{p+1} = a_i + \int_0^t f_i(t;\ y_1^p, \ldots, y_n^p)\,dt,$$

on a d'abord

$$|y_i^1 - x_i| \leq \int_0^t \{b_{i1}|y_1^0 - x_1| + \cdots + b_{in}|y_n^0 - x_n|\}\,dt,$$

et puisque

$$|y_i^1 - x_i| < \psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha)$$

et que d'autre part, les $\psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha)$ satisfont aux équations (II), on a

$$|y_i^1 - x_i| < \psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha) - \alpha_i t - \eta_i = \psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha) - \Delta_i^1 < \psi_i.$$

Le point $t,\ y_1^1, \ldots, y_n^1$ appartient donc à D; $y_1^2; \ldots, y_n^2$ sont definis dans I, et de l'inégalité

$$|y_i^2 - x_i| < \int_0^t \{b_{i1}|y_1^1 - x_1| + \cdots + b_{in}|y_n^1 - x_n|\}\,dt,$$

on déduit en remplaçant $|y_i^1 - x_i|$ par $\psi_i - \Delta_i^1$,

$$|y_i^2 - x_i| < \int_0^t \left\{\frac{d\psi_i}{dt} - \frac{d\Delta_i^1}{dt} - \frac{d\Delta_i^2}{dt}\right\} dt = \psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha) - (\Delta_i^1 + \Delta_i^2).$$

Par le même procédé, on établit de proche en proche les inégalités

$$|y_i^p - x_i| < \psi_i(t;\ \eta;\ b;\ \alpha) - (\Delta_i^1 + \Delta_i^2 + \cdots + \Delta_i^p),$$

dont les seconds membres tendent vers zéro quand p croît indéfiniment, ce qui établit la proposition énoncée plus haut.

10. Nous avons, jusqu'ici, considéré une seule courbe intégrale du système (I). On peut, comme l'a fait M. PAINLEVÉ,[2] considérer l'ensemble des

[1] En particulier, on pourrait utiliser la méthode des approximations successives pour perfectionner les solutions approchées obtenues par le procédé de CAUCHY-LIPSCHITZ.

[2] Comptes Rendus (juin 1899).

courbes intégrales situées dans un domaine Δ, à $n+1$ dimensions, où le système (1) est régulier. Nous voulons dire par là que, dans Δ, les seconds membres des équations (1) sont finis, continus, et satisfont aux conditions de LIPSCHITZ (2).

De tout point θ, a_1 $a_2, \ldots, a_n$ intérieur à Δ part une courbe intégrale définie et régulière dans un intervalle assez petit $(\theta-h, \theta+h)$ entourant θ. Pour être renseigné dans un intervalle plus grand on utilisera des équations approchées.

Fixons-nous une limite supérieure T de l'étendue des intervalles où nous ferons varier t dans l'étude des intégrales de (1). Donnons-nous aussi un nombre positif ϱ auquel nous ferons correspondre des nombres α_i tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i^2(T;\, 0;\, b;\, \alpha) < \frac{\varrho^2}{4}\cdot$$

(les ψ ayant même sens qu'au n° 3).

Soient d'autre part $\varphi_1(t;\, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(t;\, x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions définies dans Δ, y satisfaisant aux inégalités

$$|f_i(t;\, x_1, \ldots, x_n) - \varphi_i(t;\, x_1, \ldots, x_n)| < \alpha_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

et telles que le système

$$\frac{dy_i}{dt} = \varphi_i(t;\, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

admette des intégrales qui, dans Δ, sont régulières, c'est à dire vérifient les conditions de continuité imposées au n° 1 aux y et à leurs dérivées.

Soient C la courbe intégrale de (1), C' la courbe intégrale de (26) issues d'un point $\theta, a_1, \ldots, a_n$ de Δ. Voici quel parti on peut tirer des courbes C', supposées connues, pour l'étude des courbes C.

Faisons varier t, en partant de θ, dans un intervalle d'étendue au plus égale à T. Si aucun point de C' n'est à une distance[1] de la frontière de Δ

[1] La distance de deux points $t, x_1, \ldots, x_n$; $t', x'_1, \ldots, x'_n$ est l'expression

$$\sqrt{(t-t')^2 + (x_1-x'_1)^2 + \cdots + (x_n-x'_n)^2}.$$

La distance d'un point P à une multiplicité est la plus courte des distances de P aux points P' de la multiplicité.

L'ensemble des points de Δ dont la distance à la frontière est supérieure à ρ constitue, si ρ est assez petit, un domaine Δ_ρ, possédant la propriété suivante. La courbe intégrale partant d'un point $\theta, a_1, \ldots, a_n$ intérieur à Δ_ρ se poursuit régulièrement quand t varie dans un intervalle $\theta-h \leqq t \leqq \theta+h$ dont l'étendue $2h$ est au moins égale à la limite fixe $\dfrac{2\rho}{\sqrt{1+M_1^2+\cdots+M_n^2}}$, M_i désignant la valeur absolue la plus grande de $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ dans Δ.

inférieure ou égale à $\frac{\varrho}{2}$, la partie de C' correspondant aux mêmes valeurs de t, existe, est régulière et tout entière intérieure à Δ. Lorsqu'on atteint un point de C' dont la distance à la frontière de Δ est égale à $\frac{\varrho}{2}$, la distance du point correspondant de C à la même frontière est inférieure à ϱ.

Ces résultats sont une conséquence des précédents. Ils donnent un sens précis à la proposition intuitive: *Deux systèmes d'équations différentielles voisines ont des solutions voisines.*

11. Pour appliquer ce qui précède, il faut connaître des fonctions φ_i telles que l'étude des courbes intégrales C' du système (26) soit plus facile que celles des courbes C.[1] On peut trouver immédiatement des fonctions de cette nature dans certains cas particuliers; dans le cas général on ne peut guère donner que des indications.

Nous ne considérons ici que le cas d'une seule équation du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = f(t;\,x). \tag{27}$$

Pour étudier l'allure générale des courbes intégrales dans une région Δ du plan t, x, où f est finie, continue, et satisfait à la condition de Lipschitz,

$$|f(t,x) - f(t,x')| < k\,|x - x'|,$$

nous déterminerons une fonction $\varphi(t,x)$ telle que

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(t;\,y) \tag{28}$$

soit intégrable, et que le module de $f(t,x) - \varphi(t,x)$ soit, dans Δ, inférieur à un nombre α. Ce nombre α dépend de l'étendue maximum T des intervalles où l'on veut faire varier t.

Géométriquement, dans l'espace défini par les coordonnées t, x, z, les deux surfaces S, Σ, d'équations

$$(S)\ z = f(t,x) \qquad (\Sigma)\ z = \varphi(t,x)$$

doivent être coupées par une même parallèle à Oz en des points voisins.

[1] Dans le même ordre d'idées, M. Severini représente les intégrales d'un système différentiel par des séries de polynômes. (Rendiconti del R. Ist. Lombardo 1898, 1899, 1900. Mémoire édité chez Zanichelli, Bologne 1899). M. Painlevé a signalé aussi la formation de telles séries (Bulletin de la Société Mathématique 1899).

Nous construirons une telle surface Σ en coupant S par des plans parallèles à tOx, la distance de deux plans consécutifs étant au plus égale à α. A chaque partie s de S comprise entre deux plans consécutifs P, P', nous ferons correspondre une partie σ de Σ constituée par la projection, faite parallèlement à Oz de s sur le plan Π équidistant de P et de P'.

Pratiquement,[1] *on fera sur le plan tOz la représentation topographique, par courbes de niveau cotées de la partie de S se projetant à l'intérieur de Δ. Dans cette région, toute courbe intégrale C de (27) est représentée approximativement par une ligne brisée C'' dont les sommets sont sur les courbes de niveau: tout côté de la brisée est limité à deux courbes de niveau consécutives, et a pour coefficient angulaire la demi-somme des cotes de ces courbes de niveau.*

L'emploi de cette méthode est très pratique lorsque les courbes de niveau $f(t, x) =$ constante, sont faciles à tracer; le lecteur imaginera aisément un exemple où il en serait ainsi.

Plus généralement on pourrait diviser Δ en domaines partiels δ, tels que dans chacun d'eux l'oscillation de $f(t, x)$ soit au plus égale à α. On construirait φ en prenant dans chaque domaine δ une valeur constante intermédiaire entre les valeurs extrêmes de f dans le même domaine.

Ce procédé, au point de vue analytique, est analogue à la méthode de Cauchy-Lipschitz. Il en diffère en ce que *la détermination des valeurs intermédiaires*[2] *de t correspondant aux sommets de la brisée, s'y fait en limitant directement l'oscillation de $f(t, x)$.*

12. Nous avons supposé que la fonction $f(t, x)$ restait finie. Pour lever cette restriction, et ne pas écarter les points des courbes C où la tangente est parallèle à Ox, donnons à l'équation (27) la forme

$$\frac{dt}{P(t, x)} = \frac{dx}{Q(t, x)}. \tag{28}$$

Supposons que les fonctions P et Q soient finies et continues dans une région Δ du plan tOx, qu'elles ne s'y annulent pas simultanément, et qu'elles y vérifient les conditions de Lipschitz

[1] Comptes Rendus, 20 février 1905.

[2] Le calcul de ces valeurs exigerait la résolution d'équations finies; et, en toute rigueur, la méthode indiquée donnerait lieu à une discussion à laquelle nous ne nous arrêterons pas. Il nous semble également inutile d'étendre ces considérations à un système (1) quelconque; la seule application pratique de l'idée qui est à la base de la méthode, est, dans le cas général, la remarque faite à la fin du nº 8.

$$(29)\qquad \begin{cases} |P(t,x)-P(t',x')|<a|t-t'|+b|x-x'| \\ |Q(t,x)-Q(t',x')|<c|t-t'|+d|x-x'|. \end{cases}$$

En prenant pour variable indépendante l'arc s d'une courbe intégrale, l'équation (28) donne le système

$$(30)\qquad \frac{dt}{ds}=P'=\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}},\quad \frac{dx}{ds}=Q'=\frac{Q}{\sqrt{P^2+Q^2}}.$$

Les seconds membres de ces équations satisfont, comme on le vérifiera facilement, à des conditions de LIPSCHITZ analogues à (29); ils sont liés d'ailleurs par la relation $P'^2+Q'^2=1$.

Traçons les courbes de niveau N_i

$$P'(t,x)=\cos\theta_i,\ \ Q'(t,x)=\sin\theta_i,$$

les angles θ_i étant choisis de façon que $0<\theta_{i+1}-\theta_i<2\alpha$; le nombre α dépendant des coefficients des inégalites de LIPSCHITZ et de la longueur maximum S des arcs que l'on veut étudier sur les courbes intégrales C.

On construira les brisées C' ayant leurs sommets sur les courbes N_i, l'angle que fait avec Ot le côté compris entre N_i et N_{i+1} étant $\frac{\theta_i+\theta_{i+1}}{2}$. Ces brisées représentent approximativement les courbes intégrales C; on évaluerait facilement l'approximation. Il est bon de noter que, dans ce cas, on comparerait les extrémités d'arcs de C et de C' ayant même longueur; cela tient au choix de la variable indépendante s.

13. Nous n'avons jusqu'ici trouvé que des limites supérieures des valeurs absolues des erreurs que comportent les solutions approchées d'un système d'équations différentielles, sans rien indiquer au sujet des signes de ces erreurs.

Observons d'ailleurs que le système (11) déterminant ces limites supérieures $\psi(t)$ correspondant aux équations (1) et aux solutions approchées $y(t)$ du n° 1, présente, par la forme linéaire de ses équations et la grandeur de leurs coefficients, une certaine analogie avec le système auxiliaire ou les équations aux variations que MM. DARBOUX et POINCARÉ ont utilisés pour étudier les solutions d'un système différentiel voisines d'une solution donnée. On est alors conduit à penser qu'en tenant compte des signes dérivées partielles auxquelles correspondent les coefficients des inégalités de LIPSCHITZ et de ceux des différences $\frac{dy_i}{dt}-f_i(t;y_1,\ldots,y_n)$, on peut arriver à des résultats plus précis, en diminuant au besoin l'intervalle d'étude. C'est ce que nous allons montrer, pour le cas d'une seule équation, en

utilisant un intéressant théorème dû à M. Pétrovitch,[1] que nous rappellerons tout d'abord.

Ce théorème permet la comparaison directe des solutions de trois équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{31}$$

$$\frac{du}{dt} = \varphi(t, u), \tag{32}$$

$$\frac{dv}{dt} = \psi(t, v), \tag{33}$$

quant les hypothèses suivantes sont vérifiées.

Soit R une région du plan t, x où l'équation (31) est régulière, où les fonctions $\varphi(t, x)$, $\psi(t, x)$ sont continues, et où les différences $f - \varphi = f(t, x) - \varphi(t, x)$, $f - \psi = f(t, x) - \psi(t, x)$ sont de signes constants et contraires. Soint $P(0, a)$ un point de cette région, $x(t)$, $u(t)$, $v(t)$ les solutions de (31), (32), (33) correspondant à ce point, c'est à dire prenant la valeur a pour $t = 0$.

Appelons I un intervalle $0 \leq t \leq \theta$ où $u(t)$ et $v(t)$ existent et sont continues, et sont telles que les points du domaine R' définis par les conditions: t compris entre 0 et θ, x compris entre $u(t)$ et $v(t)$ soient intérieurs à R.

Dans ces conditions, $x(t)$ est défini dans l'intervalle I, la différence $x(t) - u(t)$ a le signe de $f - \varphi$, $x(t) - v(t)$ a le signe contraire, celui de $f - \psi$.

Cette proposition, dont la démonstration est simple, peut être étendue à des systèmes d'équations du premier ordre. A l'aide de cette généralisation on peut démontrer d'une façon nouvelle les résultats antérieurement obtenus; nous n'insistons pas sur ce point, et nous passons à l'application annoncée.

14. Considérons l'équation

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{34}$$

et une fonction $y(t)$, solution approchée de cette équation, prenant pour $t = 0$ la valeur initiale x_0 de la solution cherchée. Posons

$$Q(t) = f(t, y) - \frac{dy}{dt};$$

admettons, pour simplifier que $Q(0)$ ne soit pas nul, et que les solutions exacte

[1] Mathematische Annalen. T. 54, 1901, p. 417.

et approchée $x(t)$, $y(t)$ soient continues, ainsi que leurs dérivées premières au voisinage de $t=0$. Désignons par δ la différence $x-y$. On a pour $t=0$

$$\delta = 0, \quad \frac{d\delta}{dt} = Q(0).$$

Dans bien des cas, par exemple si x et y sont développables en séries entières, on peut prévoir l'existence d'un intervalle $(0, l)$ où δ garde un signe constant. Ce signe est alors celui de $Q(0)$. Nous supposons que l'existence d'un tel intervalle est établie, et nous allons le déterminer, c'est à dire trouver un nombre l tel que pour $0 < t < l$, δ garde un signe constant.

On peut écrire

$$\frac{d\delta}{dt} = f(t, x) - f(t, y) + Q(t).$$

Admettons l'existence et la continuité des dérivées premières de $f(t, x)$, dans le domaine D défini par $0 < t < r$, $y(t) - \varepsilon < x < y(t) + \varepsilon$,[1] nous pouvons écrire

$$f(t, x) - f(t, y) = \delta f'_x(t, y + \theta\delta)$$

θ est une fonction de t qui reste comprise entre 0 et 1; de même $f'_x(t, y+\theta\delta)$ est une fonction de t, soit $P(t)$. Si cette fonction était connue, on aurait δ et par suite x, en intégrant l'équation linéaire

$$\frac{d\delta}{dt} = \delta P(t) + Q(t). \tag{35}$$

Mais $f(t, x)$, x et y étant continues, $\dfrac{f(t, x) - f(t, y)}{x - y}$ est fonction continue de t tant que $x-y$ n'est pas nul; de plus, si pour $t = t_1$ x et y sont égaux, $f'_x(t, y+\theta\delta)$ est encore continue pour cette valeur de t. La fonction $P(t)$ peut donc être supposé continue dans l'intervalle $0 < t < r$; et de même pour $Q(t)$.

Supposons que pour tous les points t, x du domaine D on ait

$$m < f'_x(t, x) < M, \quad \lambda(t) < Q(t) < \Lambda(t);$$

on prendra pour λ et Λ des constantes ou des fonctions de t, mais de telle façon que $\lambda(0)$ et $\Lambda(0)$ aient le signe de $Q(0)$.

Si δ est positif, on a

$$\delta m < \delta P(t) < \delta M,$$

et des inégalités de sens contraires, pour $\delta < 0$.

[1] Dans cette inégalité, x est une variable qu'il ne faut pas confondre avec l'intégrale $x(t)$, que désigne habituellement la lettre x.

Admettons que $Q(o)$ soit positif, et comparons δ solution de (35), δ_1 et δ_2 solutions de

$$(36) \qquad \frac{d\delta_1}{dt} = \delta_1 m + \lambda,$$

$$(37) \qquad \frac{d\delta_2}{dt} = \delta_2 M + \Lambda$$

s'annulant pour $t = o$. Pour appliquer le théorème de M. PÉTROVITCH, nous regarderons les équations (35), (36), (37) comme correspondant respectivement à (31), (32), (33), δ, δ_1, δ_2 désignant maintenant les variables appelées plus haut x, u, v. Nous devons chercher les signes des différences

$$(P - m)\delta + Q - \lambda, \quad (P - M)\delta + (Q - \Lambda)$$

qui, puisque $Q(o) > o$ entraîne $\delta > o$, sont respectivement + et —. On a donc tant que δ est positif et inférieur à ε

$$\delta_1 < \delta < \delta_2 .$$

D'autre part les fonctions δ_1 et δ_2 ont pour t positif et très petit le signe + commun à $\lambda(o)$ et $\Lambda(o)$.

Il résulte de là que si l'on désigne par l un nombre positif inférieur à ε et à la plus petite des racines positives des équations

$$\delta_1 = o \qquad \delta_2 = \varepsilon,$$

dans tout l'intervalle (o, l) δ *sera positif et* x *supérieur à* y.

On traiterait de la même façon le cas où $Q(o) < o$. Il est évident, du reste, que l'on pourrait élargir les hypothèses qui viennent d'être faites. Mais les indications précédentes suffisent à montrer l'intérêt qui s'attache à l'étude attentive des équations linéaires telles que (35) analogues aux équations aux variations construites avec les solutions approchées.[1]

Grenoble le 15 février 1906.

---

[1] Depuis que ces lignes ont été écrites, j'ai obtenu à ce sujet des résultats qui sont resumés dans une Note des Comptes-Rendus (10 février 1908).

LES DÉRIVÉES PREMIÈRES ET SECONDES DU POTENTIEL

PAR

HENRIK PETRINI

À VEXIO.

Introduction.

L'équation de POISSON

$$\Delta V = -4\pi\varrho,$$

où V désigne le potentiel Newtonien dans le point $P(x, y, z)$ d'une masse à trois dimensions dont la densité en ce même point est égale à ϱ, a été déduite par POISSON en 1813 sous la condition que la densité est constante dans le voisinage du point P. Puis GAUSS, en 1840, a déduit la même formule sous la condition plus générale, que ϱ admette les dérivées du premier ordre. Après GAUSS plusieurs géomètres et physiciens, parmi lesquelles nous citons DIRICHLET, RIEMANN, CLAUSIUS, KIRCHHOFF, KRONECKER, ont essayé de déduire la formule de POISSON dans des cas plus généraux.[1] Mais ce n'est qu'en 1882 que M. HÖLDER[2] a réussi à la déduire sans avoir recours à la condition de GAUSS, en supposant seulement la condition

$$|\varrho - \varrho_0| < A r^{\mu},$$

ϱ_0 étant la densité au point considéré P, ϱ la densité dans un point quelconque Q, situé dans l'intérieur d'un petit espace autour du premier point, r la distance PQ, A et μ des constantes positives. Plus tard, en 1887 M. MORERA[3], a déduit la même formule sous la condition plus générale encore, que l'intégrale

[1] Voir M. BACHARACH: »Abriss der Geschichte der Potentialtheorie.» Diss. Würzburg 1883.

[2] O. HÖLDER: »Beiträge zur Potentialtheorie.» Diss. Stuttgart 1882.

[3] G. MORERA: »Sulle derivate seconde della funzione potenziale di spazio.» Rendiconti del R. Instituto Lombardo Serie II, Vol. XX, fasc. VIII. Milano 1887.

$$\int_0^r (\varrho - \varrho_0) \frac{dr}{r}$$

est finie et déterminée le long de chaque rayon vecteur partant du point P, et que ϱ_0 est une constante absolue. Enfin j'ai réussi[1] en 1899 à déduire la formule de POISSON sous la seule condition que la densité ϱ est continue, mais en définissant le symbole ΔV de la manière suivante:

$$\Delta V = \lim_{\substack{h_1=0\\h_2=0\\h_3=0}} \sum_{x,y,z} \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial V(x+h,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial V(x,y,z)}{dx}\right],$$

en supposant que les rapports des incréments h_1, h_2, h_3 ne tendent ni vers zéro ni vers l'infini. Dans ce cas il peut arriver que ΔV existe quoique les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{d z^2}$ n'existent pas séparément.

Cependant tous ces développements ont été faits en supposant que la densité ϱ est continue. Ils ne suffisent donc pas pour mettre en évidence, comment se comportent les dérivées secondes dans un point de la surface du corps. Pour cela il faut faire l'analyse des dérivées du potentiel dans le cas plus général encore, où la densité ϱ peut être discontinue.

Une question analogue et d'un intérêt aussi important est celle qui se rapporte à la détermination de la dérivée première du potentiel d'une simple couche pour un point situé dans la surface ou infiniment près d'elle. Cette question a été traitée par MM. HÖLDER[2] et MORERA[3] sous les mêmes conditions que la précédente. Plus récemment M. POINCARÉ[4] a traité cette question d'une manière très générale.

Enfin la théorie du potentiel d'une double couche dépend de l'évaluation des dérivées secondes du potentiel d'une simple couche. Ce dernier problème a aussi été traité par M. POINCARÉ dans des cas très étendus. M. LIAPOUNOFF a démontré un théorème fondamental sur le potentiel d'une double couche.[5] L'application de ce théorème exige qu'on sache si la limite de la dérivée normale ex-

[1] «Démonstration générale de l'équation de POISSON $\Delta V = -4\pi\varrho$ en ne supposant que ϱ soit continue.» K. Vet. Akad. Öfvers. Stockholm 1899.

[2] O. HÖLDER: «Beiträge zur Potentialtheorie.» Diss. Stuttgart 1882.

[3] G. MORERA: «Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie.» Rend. Lomb. S. II V. XX fasc. XIV. Milano 1887.

[4] H. POINCARÉ: «Théorie du potentiel Newtonien.» Paris 1899.

[5] A. LIAPOUNOFF: «Sur certaines questions qui ce rattachent au problème de DIRICHLET.» Journal de Mathématiques IV série V, 1898 pp. 241—311.

térieure du potentiel d'une double couche existe,[1] mais les conditions nécessaires et suffisantes pour que cela ait lieu n'ayant pas été données, il dit (p. 293):

»Il va sans dire qu'il est impossible de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence, la régularité et l'égalité des deux dérivées normales de W. Mais on peut en indiquer des conditions suffisantes plus ou moins générales, etc.»

Dans le présent mémoire j'ai essayé de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des dérivées premières et secondes du potentiel en ne faisant en général sur la densité d'autre hypothèse dispensable que celle qu'elle est finie. Le cas où la densité est infinie en un certain point peut être traité de la même manière, quoique ce cas soit ici exclu. Quelques-uns des principaux résultats de mes recherches ont été publiés dans des mémoires divers.[2]

CHAPITRE I.

Les dérivées secondes du potentiel d'une masse à trois dimensions.

§ 1. *Évaluation de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. Pour l'étude du potentiel et de ses dérivées dans le voisinage du point $P(x, y, z)$ il suffit d'en étudier la partie qui se rapporte à une petite sphère, dont le centre est en ce point P. Soit a le rayon de cette sphère ϱ une fonction qui dans le domaine de cette sphère reste plus petite qu'une constante finie, et posons

$$V = \int \varrho \frac{d\tau}{r}, \tag{1}$$

où $d\tau$ est l'élément de volume dans le point $Q(\xi, \eta, \zeta)$ et r, la distance PQ; l'intégration s'étend sur tous les éléments de la sphère. Soit V_h le potentiel de

[1] Voir aussi ERNST RICHARD NEUMANN: «Studien über die Methoden von C. NEUMANN und G. ROBIN zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie.» Preisschriften der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. Leipzig 1905 pp. 38—46.

[2] «Sur l'existence des dérivées secondes du potentiel» Comptes Rendus. Paris 1900.

«Allgemeine Existensbedingungen für die zweiten Differentialquotienten des Potentials. K. Vet. Akad. Öfvers. Stockholm 1900.

«Études sur les dérivées premières du potentiel d'une couche simple.» Ibid.

«Les limites des dérivées secondes du potentiel d'une couche simple.» Ibid. 1901.

«Continuité et discontinuité des dérivées du potentiel.» Ibid.

la sphère au point $P'(x+h, y, z)$, la quantité h étant assez petite pour que ce point se trouve dans l'intérieur de la sphère; soit de plus R la distance $P'Q$ et posons

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi = x + r\cos\vartheta \\ \eta = y + r\sin\vartheta\cos\psi \\ \zeta = z + r\sin\vartheta\sin\psi \\ \cos\vartheta = u. \end{cases}$$

Nous aurons

$$(3)\qquad \begin{cases} R = \sqrt{r^2 - 2rhu + h^2} \\ V = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_0^{a} \varrho r dr \\ V_h = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_0^{a} \varrho r^2 \frac{dr}{R} \\ \frac{\partial V}{\partial x} = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{-1}^{1} u du \int\limits_0^{a} \varrho dr \\ \frac{\partial V_h}{\partial x} = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_0^{a} \varrho \frac{ru - h}{R^3} r^2 dr, \end{cases}$$

d'où, en posant

$$(4)\qquad \begin{cases} r = ht \\ q = \sqrt{t^2 - 2tu + 1}, \end{cases}$$

on déduit

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_0^{1} \varrho \left(\frac{tu-1}{q^3} t^2 - u\right) dt +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_1^{\frac{a}{h}} \varrho \left(\frac{tu-1}{q^3} t^2 - u\right) dt \equiv I_h + I'_h,$$

en nommant les deux dernières intégrales I_h et I'_h resp. La quantité $\frac{tu-1}{q^3} t^2$ ne changeant pas de signe entre les limites d'intégration de I_h, on peut écrire

$$I_h = \varrho' \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{1} t^2 dt \int\limits_{-1}^{1} \frac{\partial \frac{t-u}{q}}{\partial u} du - \int\limits_0^{2\pi} \partial\psi \int\limits_{-1}^{1} u du \int\limits_0^{1} \varrho dt,$$

ϱ' étant une valeur moyenne de ϱ. Le premier terme du second membre est $= -\frac{4}{3}\pi\varrho'$, donc $\lim_{h=0} I_h$ est finie. Soit w une constante quelconque choisie de manière que

$$\frac{a}{h} > w > 1,$$

donc on aura

$$I'_h = -\int_0^{2\pi} d\psi \int_1^w t^2 dt \int_{-1}^{\frac{1}{t}} \varrho \frac{1 - tu}{q^3} du + \int_0^{2\pi} d\psi \int_1^w t^2 dt \int_{\frac{1}{t}}^1 \varrho \frac{tu - 1}{q^3} du -$$

$$- \int_1^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 u\,du \int_1^w \varrho\,dt + \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 du \int_w^{\frac{a}{h}} \varrho \left(\frac{tu - 1}{q^3} t^2 - u\right) dt,$$

et on trouve comme pour I_h que chacune des trois premières intégrales du second membre a une limite finie, quand h tend vers zéro. La dernière intégrale peut être mise sous la forme

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_1^1 du \int_w^{\frac{a}{h}} \varrho \left[\frac{3u^2 - 1}{t} + \frac{1}{t^2} P\left(\frac{1}{t}, u\right)\right] dt,$$

où $\lim_{t=\infty} P\left(\frac{1}{t}, u\right)$ est finie. Par suite elle a une limite finie pour $\lim h = 0$ en même temps que la quantité K_h, définie par l'équation

$$(5)\quad \begin{cases} K_h = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 (3u^2 - 1) du \int_1^{\frac{a}{h}} \varrho \frac{dt}{t} \\ \quad = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^1 (3u^2 - 1) du \int_h^a \varrho \frac{dr}{r} \\ \quad = \int_h^{(a)} \varrho \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dx^2} d\tau, \end{cases}$$

où l'intégration s'étend sur l'espace qui se trouve entre les deux sphères concentriques de rayons h et a. Les développements donnés conduisent donc au résultat suivant:

Théorème: *Les fonctions V, V_h, et K_h étant définies par les équations* (1), (3) *et* (5), *donc*

$$\lim \left\{\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial x}\right)-K_h\right\} \text{ est finie.}$$

Corollaire. *Si la quantité*

(6) $$K=\lim_{h=0} K_h$$

est finie, la dérivée

(7) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\lim_{h=0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial x}\right) \text{ est finie.}$$

En résumant les formules nous pouvons écrire

(8) $$\begin{cases} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial x}-\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)=K_h+L_h \\ K_h=\displaystyle\int_0^{2\pi} d\psi\int_{-1}^{1}(3u^2-1)\,du\int_h^a \varrho\frac{dr}{r} \\ L_h=\displaystyle\int_0^{2\pi} d\psi\int_{-1}^{1} du\int_0^1 \varrho\left(\frac{tu-1}{q^3}t^2-u\right)dt+\int_0^{2\pi} d\psi\int_{-1}^{1} du\int_1^{\frac{a}{h}} \varrho\left(\frac{tu-1}{q^3}t^2-u-\frac{3u^2-1}{t}\right)dt \\ \lim\limits_{h=0} L_h \text{ finie.} \end{cases}$$

§ 2. *Cas des valeurs déterminées.* La densité ϱ est fonction des coordonnées (x, y, z) du point considéré P et des coordonnées relatives (r, ϑ, ψ) du point Q, de manière qu'on peut écrire

(9) $$\varrho=\varrho(r, \vartheta, \psi)=\varrho(ht, \vartheta, \psi).$$

Restriction imposée à la fonction ϱ. Jusqu'ici nous n'avons fait que supposer que ϱ soit une fonction intégrable des coordonnées (ξ, η, ζ). Dans la suite nous imposerons à la fonction ϱ la condition que *dans le voisinage du point P elle est continue le long de chaque rayon vecteur autour de ce point*, c. à. d. que si l'on pose

(10) $$\varrho_0(u, \psi)=\lim_{h=0}\varrho(ht, \vartheta, \psi),$$

ϱ_0 doit être une fonction de u et de ψ bien déterminée; de plus nous supposerons que *la fonction ϱ_0 est intégrable pour toutes les directions (u, ψ).*

Remarque. Si la densité ϱ est continue, ϱ_0 est une constante absolue, indépendante de u et de ψ.

Dans ces conditions nous pourrons prendre h assez petite pour que $\varrho - \varrho_0$ soit si petite qu'on le voudra. Soit L_h^0 ce que devient L_h quand on y remplace ϱ par ϱ_0. On trouvera en remplaçant ϱ par $\varrho - \varrho_0$ dans l'équation (1) et en répétant les démonstrations du § 1 que la quantité $L_h - L_h^0$ devient infiniment petite en même temps que $\varrho - \varrho_0$. Par suite la fonction L_h est continue par rapport à la variable h dans le point $h = 0$. On pourra donc écrire

$$\lim_{h=0} L_h = \lim_{h=0} L_h^0,$$

$$\therefore \lim_{h=0}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) - K_h\right] = \lim_{h=0} L_h = L, \tag{11}$$

où L est une quantité bien déterminée. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème: *Si* $\varrho_0(u, \psi) = \lim_{r=0} \varrho$ *est une fonction bien déterminée et intégrable, la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ *ait une valeur finie et déterminée est que la quantité* K, *définie par l'égalité* (6), *a une valeur finie et déterminée.*

En effectuant le calcul de L on peut intégrer par rapport à t. A l'aide du tableau I des intégrales à la fin du mémoire on trouvera

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= K + L \\ L &= \int\limits_{(\Omega)} \varrho_0 \varphi(u) d\omega \\ \varphi(u) &= 1 - 3u - 5u^2 - (3u^2 - 1)\log\frac{1-u}{2} = \frac{\partial \Phi(u)}{\partial u} \\ \Phi(u) &= u - u^2 - \tfrac{1}{3}u^3 + (u - u^3)\log\frac{1-u}{2} \\ u &= \cos(r, x), \end{aligned}\right. \tag{12}$$

$d\omega$ étant l'élément de surface de la sphère décrite autour du point P comme centre, et dout le rayon est égal à l'unité; l'intégration s'étend sur toute cette surface (Ω). Les quantités K et ϱ_0 sont définies au moyen des égalités (6), (5) et (10).

Corollaire. Si K existe, on aura

$$\int\limits_{\Omega} \varrho_0 (3u^2 - 1) d\omega = 0. \tag{13}$$

Remarque sur la quantité L. Si la densité ϱ est continue, on aura

$$L = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho(x, y, z), \tag{14}$$

par suite dans ce cas la quantité L est aussi continue. D'autre part, si la fonction ϱ est discontinue, il peut aussi arriver que la quantité L est discontinue. En effet, considérons la surface qui sépare deux corps de densités continues, et supposons que ces densités sont différentes à la surface commune. La fonction L est continue dans l'intérieur de chacun des deux corps, mais se rapproche de deux valeurs différentes, lorsque le point P s'approche d'un même point de la surface, selon qu'il se meut dans un corps ou dans l'autre.

§ 3. *Cas particuliers, où existe la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. D'après les résultats du paragraphe précédent, il faut et il suffit de considérer la quantité K. Cette quantité a une valeur finie et déterminée dans les cas suivants:

(15) α)
$$\int_{-1}^{1} \varrho(3u^2 - 1)\,du = 0.$$

Ce cas aura lieu par. ex. si la densité ϱ est *constante*, si elle est fonction de r et de ψ, mais est indépendante de u, si elle est une fonction impaire par rapport à la variable u, etc.

(16) β)
$$\int_{0}^{2\pi} \varrho\,d\psi = 0.$$

Ce cas aura lieu p. e. si à chaque valeur ψ_1 de ψ correspond une valeur ψ_2 de la même variable de manière que

$$\varrho(r, u, \psi_1) = -\varrho(r, u, \psi_2).$$

Exemples: $\varrho(r, u, \psi) = -\varrho(r, u, -\psi)$, ou $= -\varrho(r, u, \pi - \psi)$ ou

$$= -\varrho(r, u, \pi + \psi) \text{ etc.}$$

Remarque. Dans ce cas β) K est $= 0$ pour chaque point de l'axe des x; par suite $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe tout le long de cet axe.

(17) γ)
$$\varrho = \varrho(ru, \psi).$$

En effet, posons

$$ru = x',$$

$$\therefore K_h = \int_0^{2\pi} d\psi \int_h^a \varrho(x', \psi) \frac{dx'}{x'} \int_{\frac{x'}{a}}^{1} (3u^2 - 1)\, du + \int_0^{2\pi} d\psi \int_a^h \varrho \frac{dx'}{x'} \int_{\frac{x'}{a}}^{\frac{x'}{h}} (3u^2 - 1)\, du +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-h}^{0} \varrho \frac{dx'}{x'} \int_{\frac{x'}{h}}^{\frac{x'}{a}} (3u^2 - 1)\, du + \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-a}^{-h} \varrho \frac{dx'}{x'} \int_{-1}^{\frac{x'}{a}} (3u^2 - 1)\, du.$$

En effectuant la troisième intégration de chacune des quatre intégrales du second membre, on trouvera que $\lim\limits_{h=0} K_h$ est finie et déterminée.

δ) La dérivée $\frac{\partial \varrho}{\partial \xi}$ est finie et intégrable.

En effet, on a

$$K_h = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} d\tau = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} u\, d\omega - \int_{(h)}^{(a)} \frac{\partial \varrho}{\partial \xi} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} d\tau, \tag{18}$$

où les intégrales de volume s'étendent sur l'espace qui se trouve entre les deux sphères de rayons h et a, et l'intégrale de surface s'étend sur les surfaces de ces mêmes sphères. Cette dernière intégrale est finie, car on a

$$\int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} u\, d\omega = - \int_{(h)}^{(a)} \varrho u^2 \frac{d\omega}{r^2} = - \tfrac{4}{3} \pi [\varrho_m(a) - \varrho_m(h)],$$

où $\varrho_m(a)$ et $\varrho_m(h)$ sont des valeurs moyennes de ϱ sur les deux sphères resp. Donc la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe.

Exemple. Si ϱ est fonction de η et de ζ, mais non pas de ξ, c. à. d. si

$$\varrho = \varrho(\eta, \zeta),$$

la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe.

(19) ε) $\lim\limits_{h=0} \int_h^a (\varrho - \varrho_0) \frac{dr}{r}$ est finie et déterminée, et $\int_{(\Omega)} \varrho_0 (3u^2 - 1)\, d\omega = 0$.

En effet, on aura

$$\int_{(h)}^{(a)} \varrho_0 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} d\tau = 0,$$

$$\therefore K_h = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} d\tau = \int_{(h)}^{(a)} (\varrho - \varrho_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \xi^2} d\tau = \int_{(\Omega)} (3u^2 - 1) d\omega \int_h^a (\varrho - \varrho_0) \frac{dr}{r},$$

$\therefore \lim_{h=0} K_h$ est finie et déterminée.

Remarque. Le cas particulier où ϱ_0 est une constante absolue, coïncide avec celui de M. Morera. Pour $\varrho - \varrho_0 = r^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$, $\lim_{r=0} \varphi$ finie, ϱ_0 une constante absolue, on retrouve le cas de M. Hölder.

Exemple. *Soit*

$$(20) \qquad \begin{cases} \varrho = \dfrac{u^2}{\log \frac{1}{r}}, \ a < 1, \\ \therefore K_h = \frac{16}{15} \pi \log \dfrac{\log \frac{1}{h}}{\log \frac{1}{a}}, \ \therefore \lim_{h=0} K_h \text{ infinie.} \end{cases}$$

Dans ce cas $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ *n'existe pas, quoique la densité* ϱ *soit continue dans tout l'espace.*

ζ) Plus généralement on trouvera sans peine qu'on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Soit*

$$\varrho(r, u, \psi) = \varrho_0(u, \psi) + \mu_1(r)\varrho_1(u, \psi) + \mu_2(r)\varrho_2(u, \psi) + \cdots + \mu_n(r)[\varrho_n(u, \psi) + \bar{\varrho}(r, u, \psi)],$$

$$\textit{où } \lim_{r=0} \bar{\varrho} = 0 \ \textit{ et } \lim_{r=0} \frac{\mu_{\nu+1}}{\mu_\nu} = 0.$$

Supposons de plus que l'intégrale

$$\int_h^a \mu_\nu(r) \frac{dr}{r}$$

devienne infinie pour $\lim h = 0$ *si* $\nu < n$, *mais qu'elle ait une limite finie, lorsque* ν *est* $= n$. *Pour que* $\lim_{h=0} K_h$ *soit finie, il faut et il suffit que*

$$(21) \qquad \int_\Omega \varrho_\nu (3u^2 - 1) d\omega = 0 \quad \text{pour} \quad \nu < n.$$

§ 4. *Continuité de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. *Cas particuliers.* Nous supposerons dans ce paragraphe que la densité ϱ est continue, donc la quantité L est continue, et il reste à examiner la continuité de K. Nous considérerons quelques cas particuliers.

α) *La densité ϱ est constante.* Dans ce cas, nous avons trouvé $L = -\frac{4}{3}\pi\varrho$, $K = 0$,

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\tfrac{4}{3}\pi\varrho(x, y, z). \tag{22}$$

La valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ dans le point voisin (x', y', z') diffère de la quantité $-\frac{4}{3}\pi\varrho(x', y', z')$ d'une quantité qui ne dépend que des masses voisines de la surface de la sphère (a). Donc la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ est continue dans toute direction.

β) $\int\limits_0^{2\pi} \varrho d\psi = 0$. Dans ce cas, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ est évidemment continue le long de l'axe des x, parce que K y est toujours $= 0$.

γ) *ϱ est fonction de ru et de ψ.* Dans ce cas, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe pour tout point de l'axe des x (§ 3 γ) et est continue le long de cet axe, si la densité ϱ y est continue.

δ) *La dérivée $\frac{\partial \varrho}{\partial \xi}$ est finie et intégrable.* Dans ce cas, la quantité K existe et est continue dans tout l'espace, ce qu'on trouve d'après (18), en observant que la dérivée première du potentiel est toujours continue.

ε) *Si* $\lim\limits_{h=0} \int\limits_h^a (\varrho - \varrho_0)\frac{dr}{r}$ *est finie,* la quantité K n'est pas nécessairement finie en tous les points du voisinage de l'origine. En effet, la fonction ϱ peut être définie, de sorte que, dans une infinité de points de l'axe des x, situés dans le voisinage du centre, la quantité

$$\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{-1}^{1} \varrho_0 (3u^2 - 1) du \text{ est } \neq 0.$$

Exemple. Supposons que U soit une fonction harmonique de x et de $r\sqrt{1-u^2}$ dans le demi-plan $\psi = \text{const.}$ et que cette fonction prenne sur l'axe des x des valeurs discontinues aux points

$$x = k_1,\, k_2,\, k_3 \ldots,\; |k_{\nu+1}| < |k_\nu|,\; \lim_{\nu=\infty} k_\nu = 0 .$$

On sait que dans le voisinage d'un tel point (k_ν) la fonction U prend des valeurs de la forme $\varphi_1 + \vartheta\varphi_2$, où ϑ est l'angle que fait avec l'axe des x le rayon vecteur qui part de ce point, et où φ_1 et φ_2 tendent vers des constantes a_ν et b_ν, lorsque le point $Q(\xi, \eta, \zeta)$ tend vers ce point. Posons

$$\varrho = U^2 \mu(r), \tag{23}$$

où la fonction $\mu(r)$ est déterminée de manière que

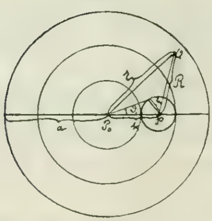
$$\lim_{h=0} \int_h^a \mu(r) \frac{dr}{r} \text{ est finie.}$$

Donc nous aurons en ce point

$$\varrho_k = (a_\nu + b_\nu \vartheta)^2 \mu(k_\nu)$$

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} \varrho_k (3u^2 - 1)\, du = \tfrac{16}{9}\pi b_\nu^2 \mu(k_\nu),$$

Fig. 1.



par suite la quantité K ne peut pas être finie (13). Il peut donc arriver — au moins si la densité ϱ est discontinue — que la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ devient infinie dans une infinité de points voisins du centre, quoique au centre lui-même

$$\lim_{h=0} \int_h^a (\varrho - \varrho_0) \frac{dr}{r} \text{ soit finie.}$$

2) $\varrho = \varrho(r, \psi)$ *à l'origine.* Nous chercherons la valeur de K au point $P(k, 0, 0)$.

Soient $a > k > h$ et R la distance PQ (fig. 1),

$$\therefore R = \sqrt{r^2 - 2rku + k^2}$$

$$\text{et } K_h = \int_{(h)}^{a} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial \xi^2} d\tau = \int_0^{2\pi} d\psi \int \varrho(r, \psi) r^2 dr \int \left[3\frac{(ru-k)^2}{R^2} - 1 \right] \frac{du}{R^3}, \tag{24}$$

les limites de l'intégration étant

r:	1) 0 à $k-h$	2) $k-h$ à $k+h$	3) $k+h$ à a
R:	1) $k-r$ à $k+r$	2) h à $k+r$	3) $r-k$ à $r+k$.

En considérant R comme variable indépendante au lieu de u et en intégrant, on aura

$$K_h = \int_0^{2\pi} d\psi \int \varrho(r, \psi) r dr \int \frac{1}{4k^3}\left[3R + \frac{6r^2 - 2k^2}{R} - \frac{(r^2-k^2)^2}{R^3}\right]$$

$$= \frac{4}{k^3}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{k-h} \varrho r^2 dr + \frac{2}{k^3}\int_0^{2\pi} d\psi \int_{k-h}^{k+h} \varrho r^2 dr - \frac{1}{4k^3}\int_0^{2\pi} d\psi \int_{k-h}^{k+h} \varrho\left[3h + \frac{6r^2 - 2h^2}{k} - \frac{(r^2-h^2)^2}{k^3}\right] r dr.$$

Posons $r = ks$ dans la première intégrale du dernier membre, $r = k + hs$ dans les deux autres, et $h = k\alpha$, $\therefore\ 0 < \alpha < 1$,

$$\therefore K_h = 4\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{1-\alpha} \varrho(ks, \psi) s^2 ds + 2\alpha \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} \varrho(k + k\alpha s, \psi)(1 + \alpha s)^2 ds -$$

$$- \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{1} \varrho(k + k\alpha s, \psi)\left\{1 - s^2 + \alpha s(3 - s^2) + \frac{\alpha^2}{4}(3 + 6s^2 - s^4)\right\}(1 + \alpha s) ds,$$

(25) $$\therefore K = \lim_{\alpha=0} K_h = 4\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{1} \varrho(ks, \psi) s^2 ds - \tfrac{4}{3}\int_0^{2\pi} \varrho(k, \psi) d\psi.$$

De plus nous trouverons, si la fonction ϱ est continue,

(26) $$\lim_{k=0} K = 0,$$

donc nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si par rapport à l'origine ϱ est fonction de r et de ψ seulement, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ est finie et déterminée en chaque point de l'axe des x; elle est aussi continue le long de cet axe, si la fonction ϱ y est continue.*

Corollaire. *Si ϱ est fonction de r seulement, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe dans tout l'espace; elle est aussi continue dans tous les points où la fonction ϱ est continue.*

En effet, on trouvera (25) que la quantité K est continue et que $\lim_{k=0} K = 0$.

§ 5. *La dérivée seconde $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ normale, tangentielle et oblique à la surface plane d'un corps.* Nous supposons que le point $P(x, y, z)$ est situé dans une partie plane de la surface qui sépare deux corps dont les densités sont constantes et

égales à ϱ_1 et ϱ_2 resp. Menons l'axe des x positifs parallèle à la normale de la surface vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1. Nous aurons

$$\varrho = \varrho_1 \text{ pour } 0 \leqq u \leqq 1 \text{ et } \varrho = \varrho_2 \text{ pour } -1 \leqq u \leqq 0,$$

$$\therefore K_h = 0, \; L = -\tfrac{8}{3}\pi\varrho_1 + \tfrac{4}{3}\pi\varrho_2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\tfrac{8}{3}\pi\varrho_1 + \tfrac{4}{3}\pi\varrho_2. \tag{27}$$

Dans la direction opposée, on aura de même

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\tfrac{8}{3}\pi\varrho_2 + \tfrac{4}{3}\pi\varrho_1. \tag{28}$$

Pour faire le calcul de la dérivée tangentielle, nous mènerons l'axe des x et le plan $\psi = 0$ dans la surface,

$$\therefore \varrho = \varrho_1 \text{ pour } 0 \leqq \psi \leqq \pi \text{ et } \varrho = \varrho_2 \text{ pour } \pi \leqq \psi \leqq 2\pi.$$

Nous obtiendrons

$$K_h = 0, \; L = -\tfrac{2}{3}\pi(\varrho_1 + \varrho_2),$$

$$\therefore \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{2\pi}{3}(\varrho_1 + \varrho_2). \tag{29}$$

Afin de trouver la valeur de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ dans une direction qui fait l'angle aigu w avec la normale laquelle est dirigée vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1, nous tirons l'axe des x dans cette direction de la normale et choisissons comme plan des xy le plan de la normale et de l'élément ds. Soient ϑ l'angle que fait le rayon vecteur r avec l'axe des x, ψ l'angle que fait avec l'axe des y la projection de r dans le plan des yz, et u le cosinus de l'angle que fait l'élément ds avec le rayon vecteur. On aura dans le cas général

$$\tag{30} \left\{ \begin{aligned} u &= \cos w \cos\vartheta + \sin w \cos\psi \sin\vartheta \\ K_h &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} (3u^2 - 1) \sin\vartheta \, d\vartheta \int_h^a \varrho \frac{dr}{r} \\ L &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \varrho_0 \varphi(u) \sin\vartheta \, d\vartheta \\ \varphi(u) &= 1 - 3u - 5u^2 - (3u^2 - 1) \log \frac{1-u}{2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} &= K + L, \\ \text{où } K &= \lim_{h=0} K_h. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas actuel nous trouverons

$$K_h = 0$$

et par suite

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \varrho_1 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(u) \sin \vartheta d\vartheta + \varrho_2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(u) \sin \vartheta d\vartheta .$$

Posons

$$\Phi(\vartheta, \psi) = \int \varphi(u) \sin \vartheta d\vartheta ,$$

$$\therefore \Phi(\vartheta, \psi) = \tfrac{5}{3}(\cos^2 w + \sin^2 w \cos^2 \psi) \cos \vartheta - \tfrac{5}{3} u \cos w - \cos \vartheta + u \cos \vartheta + \tfrac{1}{3} u^2 \cos \vartheta +$$

$$+ \{2(\cos^2 w + \sin^2 w \cos^2 \psi) \cos \vartheta - 2u \cos w - \cos \vartheta + u^2 \cos \vartheta\} \log \frac{1-u}{2} -$$

$$- 2 \sin^3 w \cos \psi \sin^2 \psi \int \frac{d\vartheta}{1-u},$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \varrho_1 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \varphi(u) \sin \vartheta d\vartheta + (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi(u) \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$= - \tfrac{4}{3} \pi \varrho_1 + (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} \left\{ \Phi(\pi, \psi) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) \right\} d\psi$$

$$\Phi(\pi, \psi) = 1 + \cos w - \tfrac{4}{3} \cos^2 w - \tfrac{5}{3} \sin^2 w \cos^2 \psi - \sin^2 w \cos 2\psi \log \frac{1 + \cos w}{2} -$$

$$- 2 \sin^3 w \cos \psi \sin^2 \psi \int^{\pi} \frac{d\vartheta}{1-u}$$

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}; \psi\right) = - \tfrac{5}{3} \sin w \cos w \cos \psi - 2 \sin w \cos w \cos \psi \log \frac{1 - \sin w \cos \psi}{2} -$$

$$- 2 \sin^3 w \cos \psi \sin^2 \psi \int^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{1-u},$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \Phi(\pi, \psi) d\psi = 2\pi (\tfrac{1}{6} + \cos w - \tfrac{1}{2} \cos^2 w) - I(\pi)$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) d\psi = 4\pi (\cos w - \cos^2 w) - I\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$I(\vartheta) \equiv 2\sin^3 w \int d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{\cos\psi \sin^2\psi d\psi}{1-u} -$$

$$= 2\pi \int \{2(1-\cos w\cos\vartheta)^2 - \sin^2 w \sin^2\vartheta\} \frac{d\vartheta}{\sin^3\vartheta} -$$

$$-2\int \{(1-\cos w\cos\vartheta)^2 - \sin^2 w\sin^2\vartheta\} \frac{1-\cos w\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1-u}.$$

De plus on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{1-u} = \frac{2\pi}{|\cos\vartheta - \cos w|}.$$

Mais

$$0 < w < \frac{\pi}{2}, \text{ et } \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi,$$

$$\therefore \cos\vartheta - \text{co}\, w < 0,$$

$$\therefore I(\vartheta) = -2\pi(1-\cos w)^2 \frac{1+\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} + \text{const.},$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \left\{\Phi(\pi, \psi) - \Phi\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right)\right\} d\psi = -\tfrac{2}{3}\pi + 2\pi\cos^2 w,$$

(31) $$\therefore \frac{\partial^2 V}{ds^2} = -\tfrac{2}{3}\pi(\varrho_1+\varrho_2) + 2\pi(\varrho_2-\varrho_1)\cos^2 w, \quad 0 < w < \frac{\pi}{2}.$$

De même on aura

(32) $$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = -\frac{2\pi}{3}(\varrho_1+\varrho_2) + 2\pi(\varrho_1-\varrho_2)\cos^2 w, \quad \frac{\pi}{2} < w < \pi.$$

Remarque. Si la fonction ϱ n'est pas constante, et qu'elle varie d'une manière continue de chaque côté du plan considéré, de sorte que $\lim \varrho = \varrho_1$ et $= \varrho_2$ pour les deux côtés, on retrouvera les mêmes formules pour la quantité L. D'autre part K n'est pas nécessairement $= 0$ dans ce cas. Pour avoir la valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$, on n'a donc qu'à ajouter la quantité K dans les seconds membres des égalités (31) et (32).

§ 6. *Les dérivées* $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$. L'étude de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ se fait de la même manière que celle de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. En posant comme précédemment

$$V_h = V(x+h,\, y,\, z)$$
$$u = \cos\vartheta$$
$$r = ht$$

nous aurons

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\partial V_h}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\right) = I_h + I'_h$$

$$I_h \equiv \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^1 \varrho(ht,\, \vartheta,\, \psi)\left(\frac{t^3}{q^3} - 1\right) dt$$

$$q \equiv \sqrt{t^2 - 2tu + 1}$$

$$I'_h \equiv \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \varrho\left(\frac{t^3}{q^3} - 1\right) dt.$$

L'intégrale I_h peut s'écrire

$$I_h = \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^{\pi} \varrho(ht',\, \vartheta,\, \psi) \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^1 \frac{t^3}{q^3} dt - \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^{\pi} \varrho(ht'',\, \vartheta,\, \psi) \sin^2\vartheta\, d\vartheta,$$

t' et t'' étant des valeurs moyennes de t. De plus on trouvera

$$\int_0^1 \frac{t^3}{q^3} dt = 3(q_1 - 1) - \frac{3 + 2u}{q_1(1+u)} + \frac{1}{1 - u^2} + 3u \log \frac{2 + q_1}{q_1}$$

$$q_1 = \sqrt{2(1-u)},$$

$$\therefore \lim_{h=0} I_h \text{ est finie.}$$

$$I'_h = \int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \varrho\left(\frac{t^3}{q^3} - 1 - \frac{3\cos\vartheta}{t}\right) dt + 3\int_0^{2\pi} \cos\psi\, d\psi \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \varrho \frac{dt}{t}$$

$$\frac{t^3}{q^3} - 1 - \frac{3\cos\vartheta}{t} = \frac{1}{t^2} P\left(\frac{1}{t}\right), \quad \lim_{t=\infty} P\left(\frac{1}{t}\right) \text{ finie.}$$

Nous obtiendrons le résultat suivant

$$
(33)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \overline{K} + L\\
&\overline{K} \quad = \lim_{h=0} \overline{K}_h\\
&\overline{K}_h \quad = 3\int_0^{2\pi}\cos\psi\, d\psi\int_0^{\pi}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\int_h^{a}\varrho(r,\vartheta,\psi)\frac{dr}{r} = \int_h^{a}\varrho\,\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\,d\tau\\
&L \qquad \int_0^{2\pi}\cos\psi\, d\psi\int_0^{\pi}\varrho_0(\vartheta,\psi)\,\overline{\varphi}(u)\sin^2\vartheta\, d\vartheta\\
&\varphi(u) \ = \frac{1}{1-u} - 3 - 5u - 3u\log\frac{1-u}{2}\\
&\quad u = \cos\vartheta\\
&\int\overline{\varphi}(\cos\vartheta)\sin^2\vartheta\, d\vartheta = \sin\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta - \tfrac{4}{3}\sin^3\vartheta - \sin^3\vartheta\log\frac{1-\cos\vartheta}{2}.
\end{aligned}\right.
$$

D'où le théorème:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ *existe est que la quantité* K *existe.*

Cas particuliers. Si la fonction ϱ_0 est indépendante de ψ ou de ϑ, ce qui a lieu par ex. si la densité ϱ est continue,

$$L \text{ est } = 0, \ \therefore\ \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = K.$$

Si la densité ϱ est elle-même indépendante de ψ ou de ϑ, la quantité K_h est $= 0$, et dans ce cas $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = 0$.

Pour la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$ nous aurons les formules analogues

$$
(34)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x} = \overline{K} + \overline{L'}\\
&\overline{L'} \quad = \int_0^{2\pi} d\psi\int_0^{\pi}\varrho_0(\vartheta,\psi)\,\overline{\varphi}(u')\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\\
&u' \quad = \sin\vartheta\cos\psi\\
&\int\overline{\varphi}(u')\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta = -\left(1 + \tfrac{4}{3}u' + u'\log\frac{1-u'}{2}\right)\sin^2\vartheta.
\end{aligned}\right.
$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. $\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$ *existe dans les mêmes conditions que* $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$, *mais* $\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$ *n'est pas en général égale à* $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$.

Remarque. Si la densité ϱ est continue, donc $L = L' = 0$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \overline{K}.$$

§ 7. *Valeurs des dérivées* $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ *et* $\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$ *à la surface plane d'un corps.* Soient ϱ_1 et ϱ_2 les densités de deux corps, dont les surfaces ont une partie plane commune, et soit le point P situé dans ce plan. Nous traiterons dans ce paragraphe trois cas.

1°. Prenons P pour origine et dirigeons l'axe des x suivant la normale vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1. Supposons que les densités ϱ_1 et ϱ_2 soient continues, $\therefore$ la fonction ϱ_0 est indépendante de ψ,

$$\therefore \overline{L} = 0, \therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \overline{K}.$$

La valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}$ s'obtient en prenant l'axe des y comme axe des coordonnées polaires. La fonction ϱ_0 étant indépendante de ϑ, on aura

$$L' = 0,$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \overline{K};$$

K est $= 0$, si les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes.

2°. Si l'axe des x est dirigé dans la surface et que l'axe des y fasse l'angle w avec la normale, on aura, les densités ϱ_1 et ϱ_2 étant supposées continues, $L = L' = 0$,

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = K;$$

$\overline{K}$ est $= 0$, si les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes.

3°. Si l'axe des z est situé dans la surface et que l'axe des x fasse l'angle aigu w avec la normale, dirigée vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1,

enfin, si l'axe des y fait l'angle $\frac{\pi}{2} - w$ avec cette même normale, on aura en prenant l'axe des z comme axe des coordonnées polaires,

$$
(35) \qquad \overline{K}_h = 3 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} u' u'' \sin\vartheta \, d\vartheta \int_h^a \varrho \frac{dr}{r},
$$

$u' \equiv \sin\vartheta \cos\psi$ et $u'' \equiv \sin\vartheta \sin\psi$ sont les cosinus des angles que fait le rayon vecteur avec les axes des x et des y.

Si l'on suppose que les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont continues, on trouvera

$$
\overline{L} = \int_{\Omega_1} \varrho_0 u'' \overline{\varphi}(u) \, d\omega - \int_0^{2\pi} \varrho_0 \sin\psi \Big|_0^{\pi} \overline{\Phi} \, d\psi
$$

$$
\overline{\Phi} \equiv (2\cos^2\psi - 1) \int \frac{d\vartheta}{1 - u'} + 3\cos\psi\cos\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta - \tfrac{3}{4}\cos\psi\cos^3\vartheta +
$$

$$
+ \cos\psi (3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta) \log \frac{1 - u'}{2};
$$

$$
\therefore \Big|_0^{\pi} \overline{\Phi} = \tfrac{10}{3}\cos\psi + 4\cos\psi \log 2 + (2\cos^2\psi - 1) \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{1 - \cos\psi\sin\vartheta},
$$

$$
\therefore \quad \overline{L} = \int_0^{2\pi} \varrho_0 \sin\psi (2\cos^2\psi - 1) \, d\psi \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{1 - \cos\psi\sin\vartheta} =
$$

$$
= \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} \varrho_0 \frac{2\cos^2\psi - 1}{1 - \cos\psi\sin\vartheta} \sin\psi \, d\psi = (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{\pi} d\vartheta \Big|_{w+\frac{\pi}{2}}^{w+\frac{3\pi}{2}} \Phi_1
$$

$$
\Phi_1 \equiv \frac{\cos^2\psi}{\sin\vartheta} + \frac{2\cos\psi}{\sin^2\vartheta} + \frac{2 - \sin^2\vartheta}{\sin^3\vartheta} \log(1 - \cos\psi\sin\vartheta),
$$

$$
\therefore \ \overline{L} = (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{\pi} \left[\frac{4\sin w}{\sin^2\vartheta} + \frac{2 - \sin^2\vartheta}{\sin^3\vartheta} \log \frac{1 - \sin w \sin\vartheta}{1 + \sin w \sin\vartheta} \right] d\vartheta
$$

$$
\frac{\partial \overline{L}}{\partial \sin w} = (\varrho_2 - \varrho_1)(1 - 2\sin^2 w) \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{1 - \sin w \sin\vartheta} = 2\pi (\varrho_2 - \varrho_1)(2\cos^2 w - 1) \frac{1}{\cos w}.
$$

L étant $=0$ pour $\sin w = 0$, nous aurons

$$L = 2\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^w (2\cos^2 w - 1)\,dw = 2\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\sin w \cos w,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x} = \overline{K} + 2\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\sin w \cos w. \tag{36}$$

Si l'axe des y fait l'angle $\frac{\pi}{2} + w$ avec la normale, c. à. d. si l'axe des x est dirigé vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1, tandis que l'axe des y est mené vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_2, on trouvera.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} &= K - 2\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\sin w \cos w. \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x} &= K + 2\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\sin w \cos w. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Si les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes, K est $=0$.

§ 8. *Existence de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{ds_1\,ds_2}$. Soient ds_1 et ds_2 deux éléments émanant du point $P(x, y, z)$ dans les directions $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ et $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ resp., λ_1, μ_1 etc. étant les cosinus des angles que font ces éléments avec les axes des coordonnées. Soient u_1 et u_2 les cosinus des angles que fait le rayon vecteur PQ avec les directions de ds_1 et de ds_2 resp.,

$$\left\{\begin{aligned} \therefore\ u_1 &= \cos(r, ds_1) = \lambda_1 \sin\vartheta\cos\psi + \mu_1 \sin\vartheta\sin\psi + \nu_1\cos\vartheta \\ u_2 &= \cos(r, ds_2) = \lambda_2 \sin\vartheta\cos\psi + \mu_2 \sin\vartheta\sin\psi + \nu_2\cos\vartheta, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

l'axe des z étant choisi comme axe des coordonnées polaires, de manière que

$$\left\{\begin{aligned} \xi - x &= r\sin\vartheta\cos\psi \\ \eta - y &= r\sin\vartheta\sin\psi \\ \zeta - z &= r\cos\vartheta. \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Soit V_h la valeur de V au point $P'(x+\lambda_1 h,\, y+\mu_1 h,\, z+\nu_1 h)$ c. à. d. au point qui est situé à la distance h du point P dans la direction de ds_1,

$$(40)\qquad \begin{cases} \therefore\ \dfrac{\partial V}{\partial s_2} = \displaystyle\int \varrho u_2 \frac{d\tau}{r^2} \\ \dfrac{\partial V_h}{\partial s_2} = \displaystyle\int \varrho \frac{r u_2 - ch}{R^3}\, d\tau \\ c \equiv \cos(ds_1, ds_2) = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 \\ R \equiv \sqrt{r^2 - 2rhu_1 + h^2}. \end{cases}$$

En posant $r = ht$ comme précédemment, nous trouverons

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial s_2} - \dfrac{\partial V}{\partial s_2}\right) = K_h + L_{1h} \\ K_h = \displaystyle\int_{(\Omega)} (3u_1u_2 - c)\, d\omega \int_h^a \varrho \frac{dr}{r} = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2}\, d\tau \\ L_{1h} = \displaystyle\int_{(\Omega)} u_2\, d\omega \int_0^1 \varrho\left(\frac{t^3}{q^3} - 1\right) dt + \int_{(\Omega)} u_2\, d\omega \int_1^{\frac{a}{h}} \varrho\left(\frac{t^3}{q^3} - 1 - \frac{3M_1}{t}\right) dt - \\ \qquad - c\displaystyle\int_{(\Omega)} d\omega \int_0^1 \varrho \frac{t^2}{q^3}\, dt - c\int_{(\Omega)} d\omega \int_1^{\frac{a}{h}} \left(\frac{t^2}{q^3} - \frac{1}{t}\right) dt \\ q = \sqrt{t^2 - 2tu_1 + 1}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(42)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} = K + L_1 \\ K = \lim\limits_{h=0} K_h \\ L_1 = \displaystyle\int_{(\Omega)} \varrho_0 [u_2 \bar\varphi(u_1) - c\chi(u_1)]\, d\omega \\ \bar\varphi(u_1) = \dfrac{1}{1-u_1} - 3 - 5u_1 - 3u_1 \log\dfrac{1-u_1}{2} \\ \chi(u_1) = \dfrac{1}{1-u_1} - 2 - \log\dfrac{1-u_1}{2}. \end{cases}$$

Pour $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_1}$ on obtient la formule analogue

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial s_2\, \partial s_1} = K + L_2 \\ L_2 \quad = \displaystyle\int\limits_{\Omega} \varrho_0 [u_1 \overline{\varphi}(u_2) - c\chi(u_2)]\, d\omega. \end{cases}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ *existe est que la quantité* K *existe. Si cette condition est satisfaite, la dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_2\, \partial s_1}$ *existe, aussi, mais en général ces deux dérivées ne sont pas égales.*

Corollaire. Si la quantité K est finie, on aura

$$(44)\quad \int\limits_{(\Omega)} \varrho_0 (3\, u_1 u_2 - c)\, d\omega = 0\,.$$

Remarque. Pour $c = 1$ et $u_1 = u_2$, on obtiendra les formules de $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ (30), et pour $c = 0$, $u_1 = \cos\vartheta$, $u_2 = \sin\vartheta \cos\psi$, on obtiendra les formules de $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}$ (33).

§ **9.** *Valeur de la dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ *à la surface plane d'un corps.* Soient ϱ_1 et ϱ_2 les densités de deux corps dont les surfaces ont une partie plane commune, et soit le point P situé dans ce plan. Dirigeons les axes des x et des z dans ce plan et l'axe des y vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1. Supposons que les densités ϱ_1 et ϱ_2 soient continues et posons $\varrho_1^0 = \lim\limits_{r=0} \varrho_1$, $\varrho_2^0 = \lim\limits_{r=0} \varrho_2$, donc la fonction ϱ_0 est indépendante de ϑ. Or, on a

$$(45)\quad (\lambda_1 \cos\psi + \mu_1 \sin\psi)^2 + \nu_1^2 = 1 - (\lambda_1 \sin\psi - \mu_1 \cos\psi)^2\,.$$

On peut donc poser

$$(46)\quad \begin{cases} \lambda_1 \sin\psi - \mu_1 \cos\psi = \sin\psi_1 & \text{et de même } \lambda_2 \sin\psi - \mu_2 \cos\psi = \sin\psi_2 \\ \lambda_1 \cos\psi + \mu_1 \sin\psi = \cos\psi_1 \cos\beta_1 & \lambda_2 \cos\psi + \mu_2 \sin\psi = \cos\psi_2 \cos\beta_2 \\ \nu_1 = \cos\psi_1 \sin\beta_1 & \nu_2 = \cos\psi_2 \sin\beta_2 \\ \vartheta + \beta_1 = \vartheta_1 & \vartheta + \beta_2 = \vartheta_2 \\ \therefore\ u_1 = \cos\psi_1 \sin\vartheta_1 & u_2 = \cos\psi_2 \sin\vartheta_2\,. \end{cases}$$

Nous trouverons

$$L_1 = \int_0^{2\pi} \varrho_0 \cos\psi_2 \cos(\beta_2 - 2\beta_1)\, d\psi \int_{\beta_1}^{\beta_1+\pi} \sin^2\vartheta_1 \overline{\varphi}(u_1)\, d\vartheta_1 +$$

$$+ \int_2^{2\pi} \varrho_0 \cos\psi_2 \sin(\beta_2 - 2\beta_1)\, d\psi \int_{\beta_1}^{\beta_1+\pi} \sin\vartheta \cos\vartheta_1 \overline{\varphi}(u_1)\, d\vartheta_1 -$$

$$- \int_0^{2\pi} \varrho_0 \cos\psi_2 \sin\beta_1 \sin(\beta_2 - \beta_1)\, d\psi \int_{\beta_1}^{\beta_1+\pi} \overline{\varphi}(u_1)\, d\vartheta_1 -$$

$$- c\int_0^{2\pi} \varrho_0 \cos\beta_1\, d\psi \int_{\beta_1}^{\beta_1+\pi} \sin\vartheta_1\, \chi(u_1)\, d\vartheta_1 + c\int_0^{2\pi} \varrho_0 \sin\beta_1\, d\psi \int_{\beta_1}^{\beta_1+\pi} \cos\vartheta_1\, \chi(u_1)\, d\vartheta_1 .$$

De plus on aura

$$\int \sin^2\vartheta_1 \overline{\varphi}(u_1)\, d\vartheta_1 = 3\cos\psi_1\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 - \tfrac{4}{3}\cos\psi_1\cos^3\vartheta_1 +$$

$$+ \cos\psi_1 \cos\vartheta_1 (3 - \cos^2\vartheta_1) \log\frac{1-u_1}{2} + (2\cos^2\psi_1 - 1)\int \frac{d\vartheta_1}{1-u_1}$$

$$\int \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 \overline{\varphi}(u_1)\, d\vartheta_1 = -\left(1 + \tfrac{4}{3}u_1 + u_1\log\frac{1-u_1}{2}\right)\sin^2\vartheta_1$$

$$\int \overline{\varphi}(u_1)\, d\vartheta_1 = 2\cos\psi_1\cos\vartheta_1 + 3\cos\psi_1\cos\vartheta_1\log\frac{1-u_1}{2} + (3\cos^2\psi_1 - 2)\int\frac{d\vartheta_1}{1-u_1}$$

$$\int \sin\vartheta_1\, \chi(u_1)\, d\vartheta_1 = \cos\vartheta_1 + \cos\vartheta_1\log\frac{1-u_1}{2} + \cos\psi_1\int\frac{d\vartheta_1}{1-u_1}$$

$$\int \cos\vartheta_1\, \chi(u_1)\, d\vartheta_1 = -\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_1\log\frac{1-u_1}{2},$$

$$\therefore\ L_1 = \int_0^{2\pi} \varrho_0 A\, d\psi + \int_0^{2\pi} \varrho_0 B \log\frac{1-r_1^2}{4}\, d\psi + \int_0^{2\pi} \varrho_0 C\, d\psi \int_{\beta_1}^{\beta_1+\pi} \frac{d\vartheta_1}{1-u_1}$$

$$A = -\tfrac{10}{3}\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\beta_1\cos\beta_2 - \tfrac{8}{3} r_1 r_2 + 2c$$

$$B = -2\cos\psi_1\cos\psi_2\cos\beta_1\cos\beta_2 - r_1 r_2 + c$$

$$C = \cos^2\psi_1\cos\psi_2\cos^2\beta_1\cos\beta_2 - \sin^2\psi_1\cos\psi_2\cos\beta_2 + r_1 r_2\cos\psi_1\cos\beta_1 - c\cos\psi_1\cos\beta_1 .$$

Mais $\varrho_0 = \varrho_1^0$ pour $0 \leq \psi \leq \pi$ et $= \varrho_2^0$ pour $\pi \leq \psi \leq 2\pi$,

$$\therefore \int_0^{2\pi} \varrho_0 A\, d\psi = \frac{\pi}{3}(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)(c - 3 r_1 r_2)$$

$$\int_0^{2\pi} \varrho_0 B\, d\psi = 0 .$$

Quant à la troisième intégrale, nous aurons à considérer quatre cas:

1° $\lambda_1 = \mu_1 = 0$. Dans ce cas ν_1 est $= \pm 1$, et on trouvera $C = 0$. Mais c est dans ce cas $= \nu_1 \nu_2$,

$$(47) \qquad \therefore L_1 = -\tfrac{2}{3}\pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)c.$$

Ce cas a lieu lorsque l'élément ds_1 est situé dans la surface.

2° $\lambda_1 \neq 0$, $\mu_1 = 0$. Ce cas se réduit au cas 1°, si l'on dirige l'axe des z dans la direction de l'élément ds_1.

3° $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 \neq 0$. En prenant le plan de ds_1 et de l'axe des y comme plan des yz, on peut toujours réduire le cas $\lambda_1 \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$ à ce cas et inversement. Nous ne distinguerons donc pas ce cas du cas

4° $\lambda_1 \neq 0$, $\mu_1 \neq 0$. Posons

$$(48) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = e_1 \cos\alpha_1 & \lambda_2 = e_2 \cos\alpha_2 \\ \mu_1 = e_1 \sin\alpha_1 & \mu_2 = e_2 \sin\alpha_2, \end{cases}$$

$$\therefore \lambda_1 \cos\psi + \mu_1 \sin\psi = e_1 \cos(\psi - \alpha_1), \qquad \lambda_2 \cos\psi + \mu_2 \sin\psi = e_2 \cos(\psi - \alpha_2)$$

$$\sin\psi_1 = e_1 \sin(\psi - \alpha_1).$$

D'où il suit

$$C = -e_1^2 e_2 \sin(2\psi - \alpha_1 - \alpha_2)\sin(\psi - \alpha_1).$$

Supposons que l'élément ds_1 soit dirigé vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1, $\therefore \mu_1 > 0$. Nous pourrons choisir la direction positive de l'axe des x de manière que nous ayons aussi $\lambda_1 > 0$, $\therefore 0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$. En employant la formule

$$\int_0^\pi \frac{d\vartheta}{1 - u_1} = \frac{2}{e_1 \sin(\psi - \alpha_1)}(\pi - \overline{\psi - \alpha_1}) \text{ pour } 2\pi > \psi - \alpha_1 > 0, \text{ et}$$

$$= \frac{2}{e_1 \sin(\psi - \alpha_1)}(-\pi - \overline{\psi - \alpha_1}) \text{ pour } 0 > \psi - \alpha_1 \geq -\frac{\pi}{2},$$

nous trouverons

$$\int_0^{2\pi} \varrho_0 C d\psi \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{1 - u_1} = 2\pi\varrho_1^0 e_1 e_2[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] - \pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)e_1 e_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) =$$

$$= -4\pi\varrho_1^0 \mu_1 \mu_2 - \pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)(\lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2),$$

$$(49) \qquad \therefore L_1 = 2\pi(\varrho_2^0 - \varrho_1^0)\mu_1\mu_2 - \tfrac{2}{3}\pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)c, \quad \mu_1 > 0.$$

De même on trouvera, pour $\mu_1 > 0$,

$$(50)\qquad \begin{cases} L_2 = L_1, & \text{si } \mu_2 > 0, \quad \text{mais} \\ L_2 = -2\pi(\varrho_2^0 - \varrho_1^0)\mu_1\mu_2 - \frac{2}{3}\pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)c, & \text{si } \mu_2 < 0. \end{cases}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Soient ϱ_1 et ϱ_2 les densités continues de deux corps qui ont une surface plane commune, et soit le point P situé en un point de ce plan. Soient de plus ds_1 et ds_2 deux éléments pris dans des directions quelconques et qui font avec la normale de la surface au point P des angles, dont les cosinus sont μ_1 et μ_2 resp., la direction positive de la normale étant comptée vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1. Si l'élément ds_1 est dirigé vers l'intérieur de ce même corps, donc*

$$(51)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} = 2\pi(\varrho_2^0 - \varrho_1^0)\mu_1\mu_2 - \frac{2}{3}\pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)c + K \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_1} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}, \ \textit{si } \mu_2 \geqq 0, \ \textit{mais} \\ \qquad\quad = -2\pi(\varrho_2^0 - \varrho_1^0)\mu_1\mu_2 - \frac{2}{3}\pi(\varrho_1^0 + \varrho_2^0)c + K, \ \textit{si } \mu_2 \leqq 0, \\ c = \cos(ds_1, ds_2) \\ K = \lim\limits_{h=0} K_h \\ K_h = \displaystyle\int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2} d\tau, \end{cases}$$

où l'intégration s'étend sur les deux corps, sauf une petite sphère dont le rayon est égal à h et dont le centre se trouve au point P.

Remarque. Les valeurs de L_1 et de L_2 dépendent des angles que font les directions des éléments ds_1 et ds_2 avec la normale et de l'angle qu'ils font entre eux, mais à part cela elles sont indépendantes de l'orientation de ces éléments.

Cas particuliers. 1°. Si les éléments ds_1 et ds_2 font entre eux un angle droit, c est $= 0$, et on aura

$$(52)\qquad L_1 = 2\pi(\varrho_2^0 - \varrho_1^0)\mu_1\mu_2, \ \mu_1 \geqq 0 \quad \text{cfr équ. (36).}$$

2°. Pour $c = 1$ nous retrouverons les formules (31) et (32) à la quantité K près.

3°. Si les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes, nous trouverons

$$(53)\qquad K = 0.$$

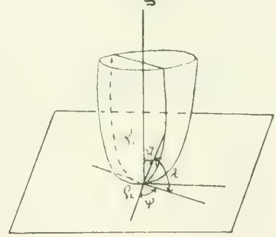
4°. Si $\varrho_1 = \varrho_2$, c. à. d. en un point, où la densité ϱ est continue, on aura

$$(54) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial^2 V}{\partial s_2 \partial s_1} = -\tfrac{4}{3}\pi \varrho c + K .$$

5°. Pour $\mu_1 = 0$ ou $\mu_2 = 0$ on retrouvera la formule (47), et dans ce cas on aura toujours $L_2 = L_1$.

§ **10.** *La dérivée* $\frac{d^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *à la surface courbe d'un corps.* Prenons la normale comme axe des coordonnées polaires (fig. 2), et soit ϑ_1 la valeur limite de ϑ dans le domaine, où la densité est ϱ_1. Si les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes, nous aurons

Fig. 2.



$$(55) \quad K_h = (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} d\psi \int_h^a \frac{dr}{r} \int_{\vartheta_1}^{\frac{\pi}{2}} (3 u_1 u_2 - c) \sin\vartheta \, d\vartheta .$$

Si nous écrivons

$$u_1 = \lambda_1 \cos\psi \sin\vartheta + \mu_1 \cos\vartheta + \nu_1 \sin\psi \sin\vartheta$$
$$u_2 = \lambda_2 \cos\psi \sin\vartheta + \mu_2 \cos\vartheta + \nu_2 \sin\psi \sin\vartheta ,$$

nous aurons

$$K_h = (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} d\psi \int_h^a \frac{dr}{r} \int_{\vartheta_1}^{\frac{\pi}{2}} (l + 3m \sin\vartheta \cos\vartheta + 3n \sin^2\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta ,$$

où

$$l = 3\mu_1\mu_2 - c$$
$$m = (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\cos\psi + (\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1)\sin\psi$$
$$n = (\lambda_1\cos\psi + \nu_1\sin\psi)(\lambda_2\cos\psi + \nu_2\sin\psi) - \mu_1\mu_2 .$$

En posant

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

et en intégrant, nous trouverons

$$K_h = (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} (l + 3n) d\psi \int_h^a \sin\lambda \frac{dr}{r} + (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} m \, d\psi \int_h^a (1 - \cos^3\lambda) \frac{dr}{r}$$
$$- (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} n \, d\psi \int_h^a \sin^3\lambda \frac{dr}{r} .$$

Cas particuliers. 1°. *Point régulier.* Si P se trouve en un point régulier de la surface, la quantité K est finie. En effet, on a dans ce cas

$$\lambda = rA, \qquad \lim_{r=0} A \text{ finie.}$$

Plus généralement, la quantité K est finie, si

(56) $$\lim_{h=0} \int_h^a |\lambda| \frac{dr}{r} \text{ est finie.}$$

Remarque I. En un point oú $\lim\limits_{r=0} \lambda = 0$, les quantités L_1 et L_2 restent les mêmes que dans le cas où la surface est plane.

Remarque II. Si les densités ϱ_1 et ϱ_2 ne sont pas constantes, on trouvera de même que la quantité K est finie, si l'égalité (56) est satisfaite.

2°. *Point conique.* Dans ce cas $\lim\limits_{h=0} \lambda$ n'est pas $= 0$, $\therefore$ la quantité K n'est pas finie en général. Dans le cas particulier, où l'angle λ est indépendant de ψ, on trouvera

$$K_h = \pi (\varrho_2 - \varrho_1)(c - 3\mu_1 \mu_2) \int_h^a \cos^2 \lambda \sin \lambda \frac{dr}{r}.$$

Pour les directions qui satisfont à l'égalité

(57) $$c = 3\mu_1 \mu_2.$$

K_h est $= 0$, $\therefore \dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ existe toujours dans ces directions, mais dans toute autre direction cette dérivée est en général infinie.

3°. *Point de rebroussement.* La dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ est finie dans toutes les directions, si

(58) $$\lim_{h=0} \int_h^a \vartheta_1^2 \frac{dr}{r} \text{ est finie.}$$

Dans le cas, où les directions de ds_1 et de ds_2 sont définies par l'égalité (57), on trouvera que la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ existe, si

(59) $$\lim_{h=0}\int_h^a |\vartheta_1^3| \frac{dr}{r} \text{ est finie,}$$

ou si l'angle ϑ_1 est indépendant de ψ.

Remarque III. Tout ce qui est dit dans ce paragraphe sur la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$, s'applique également à la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_2\, \partial s_1}$.

§ **11.** *Existence de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ *en un point quelconque.* Nous avons trouvé que l'existence de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ dépend seulement de l'existence de la quantité K. Dans ce paragraphe, nous chercherons une formule générale par laquelle on puisse savoir, si, en un point quelconque, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ existe. Soient P_0 (fig. 1) le centre de la sphère considérée, et V le potentiel au point P situé à l'intérieur de la sphère. On a pour le point P

(60) $$\left\{\begin{aligned} &K_h = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial s_1\, \partial s_2} d\tau = \int_{(h)}^{(a)} \varrho (3 v_1 v_2 - c) \frac{d\tau}{R^3}, \\ &\text{où } R = PQ,\ v_1 = \cos(R, ds_1),\ v_2 = \cos(R, ds_2),\ c = \cos(ds_1, ds_2), \end{aligned}\right.$$

et où l'intégrale s'étend sur l espace qui se trouve entre la sphère considérée et une petite sphère dont le rayon est égal à h et dont le centre se trouve en P, $h < P_0P$ et $< a - P_0P$. Prenons la droite P_0P pour axe des z et des coordonnées, polaires

(61) $$\left\{\begin{aligned} \therefore\ K_h = &\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{k-h} \varrho(r, \vartheta, \psi)(3 v_1 v_2 - c) \frac{r^2 dr}{R^3} + \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{k+h}^{a} \varrho (3 v_1 v_2 - c) \frac{r^2 dr}{R^3} + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\psi \int_{k-h}^{k+h} r^2 dr \int_{\vartheta_1}^{\pi} \varrho (3 v_1 v_2 - c) \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{R^3} \\ &h^2 = r^2 - 2rk\cos\vartheta_1 + k^2,\ \text{où } k = P_0P. \end{aligned}\right.$$

Posons

(62) $$\left\{\begin{aligned} &r = ks, \quad h = k\alpha, \quad R = kp, \quad \cos\vartheta = u, \\ &\therefore\ p = \sqrt{s^2 - 2su + 1}, \quad \alpha^2 = s^2 - 2s\cos\vartheta_1 + 1, \end{aligned}\right.$$

et soit $\varkappa$ une constante telle que $1 > \varkappa > \alpha$, donc

$$
(63)\begin{cases}
K_h=\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int\limits_0^{1-\alpha}\varrho(ks,\vartheta,\psi)(3v_1v_2-c)\frac{s^2ds}{p^3}+\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int\limits_{1+\alpha}^{\frac{a}{k}}\varrho(3v_1v_2-c)\frac{s^2ds}{p^3}+\\
+\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int\limits_{1-\alpha}^{1-\alpha}\varrho(3v_1v_2-c)\frac{s^2ds}{p^3}+\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int\limits_{1+\alpha}^{1+\alpha}\varrho(3v_1v_2-c)\frac{s^2ds}{p^3}+\\
+\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha}s^2ds\int\limits_{\vartheta_1}^{\pi}\varrho(3v_1v_2-c)\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{p^3}\equiv I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.
\end{cases}
$$

Les intégrales I_1 et I_2 sont indépendantes de α, et comme p ne peut s'évanouir que pour $s=u=1$, elles sont aussi toujours finies. L'intégrale I_5 a une valeur limite finie pour $\lim\alpha=0$. En effet, on aura

$$(64)\qquad pdp=-sdu,$$

$$\therefore I_5=\int\limits_0^{2\pi}d\psi\int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha}sds\int\limits_{\alpha}^{1+s}\varrho(3v_1v_2-c)\frac{dp}{p^2}=2\int\limits_0^{2\pi}ed\psi-\int\limits_0^{2\pi}ed\psi\int\limits_{1-\alpha}^{1+\alpha}\frac{ds}{1+s},$$

e étant une valeur moyenne de la fonction $s\varrho(3v_1v_2-c)$,

$$(65)\qquad \therefore \lim_{\alpha=0}I_5 \text{ est finie.}$$

De plus on a (cfr § 9)

$$
(66)\begin{cases}
v_1=\frac{su_1-\nu_1}{p} & v_2=\frac{su_2-\nu_2}{p}\\
u_1=\zeta_1\sin\vartheta+\nu_1\cos\vartheta & u_2=\zeta_2\sin\vartheta+\nu_2\cos\vartheta\\
\zeta_1\equiv\lambda_1\cos\psi+\mu_1\sin\psi & \zeta_2\equiv\lambda_2\cos\psi+\mu_2\sin\psi,
\end{cases}
$$

$(\lambda_1\mu_1\nu_1)$ et $(\lambda_2\mu_2\nu_2)$ étant les cosinus directeurs des éléments ds_1 et ds_2 resp. Par suite on peut écrire

$$
(67)\begin{cases}
(3v_1v_2-c)\frac{1}{p^3}=\frac{1}{p}\boldsymbol{F}+s\boldsymbol{G}\sin\vartheta\\
\boldsymbol{F}=\tfrac{3}{4}(\nu_1\nu_2-\zeta_1\zeta_2)\left[1-\frac{2(s^2+1)}{p^2}+\frac{(s^2-1)^2}{p^4}\right]+(3\nu_1\nu_2-c)\frac{1}{p^2}\\
\boldsymbol{G}=\tfrac{3}{2}(\nu_1\zeta_2+\nu_2\zeta_1)\left(\frac{s^2-1}{p^5}-\frac{1}{p^3}\right),\\
\therefore\iiint\varrho(3v_1v_2-c)s^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\frac{ds}{p^3}=\int d\psi\int sds\int\varrho\boldsymbol{F}dp+\int d\psi\int\sin^2\vartheta d\vartheta\int\varrho\boldsymbol{G}s^3ds\equiv\\
\equiv F+G,
\end{cases}
$$

où les parenthèses $\left[1 - \frac{2(s^2+1)}{p^2} + \frac{(s^2-1)^2}{p^4}\right]$ et $\left(\frac{s^2-1}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right)$ changent de signe pour $p = |s \pm 1|$ et pour $su = 1$ resp.

Application. Soit ϱ une fonction indépendante de ψ. On a

$$\int_0^{2\pi} \zeta_1 \zeta_2 \, d\psi = (c - r_1 r_2)\pi, \tag{68}$$

$$\therefore \iiint \varrho(3 v_1 v_2 - c) s^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\psi \frac{ds}{p^3} = \tfrac{3}{4}\pi(3 r_1 r_2 - c) \iint \varrho \left[1 - \frac{6s^2-2}{3p^2} + \frac{(s^2-1)^2}{p^4}\right] s^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \frac{ds}{p},$$

$$\therefore \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial s_1 \partial s_2} d\tau = \tfrac{1}{2}(3 r_1 r_2 - c) \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial z^2} d\tau, \tag{69}$$

D'où le théorème:

Théorème. *Si la fonction ϱ est indépendante de ψ, toutes les dérivées secondes dans des directions quelconques existent au point P ou bien elles n'y existent point à la même fois, sauf celles pour lesquelles*

$$3 r_1 r_2 - c = 0 \tag{70}$$

qui existent toujours.

Corollaire. *Si, au poiut P_0, ϱ est une fonction de r seulement, toutes les dérérées $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ existent en tous les points P de l'espace.* En effet, le second membre de (69) a une limite finie (§ 4 3)), donc etc.

Si ε est une constante choisie de manière que $\frac{\pi}{2} > \varepsilon > 0$, l'intégrale I_3 peut s'écrire

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{1-\alpha}^{1-\alpha} s\,ds \int_{1-s}^{p_\varepsilon} \varrho(3 v_1 v_2 - c)\frac{dp}{p^2} + \int_0^{2\pi} d\psi \int_{1-\alpha}^{1-\alpha} s\,ds \int_{p_\varepsilon}^{1+s} \varrho(3 v_1 v_2 - c)\frac{dp}{p^2}$$

$$p_\varepsilon^2 = s^2 - 2s\cos\varepsilon + 1.$$

La seconde intégrale du second membre a une limite finie pour $\lim \alpha = 0$. La première intégrale peut s'écrire

$$I' = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{1-\alpha}^{1-\alpha} \varrho(ks, \vartheta', \psi)(3 r_1 r_2 - c)_{\vartheta=0} \left(\frac{1}{1-s} - \frac{1}{p_\varepsilon}\right) s\,ds,$$

ϑ' étant une valeur moyenne de ϑ, $\varepsilon \geq \vartheta' \geq 0$. Posons

$$s = 1 - \sigma,$$

donc nous pourrons écrire

$$I' = \int_0^{2\pi} d\psi \int_\alpha^{\chi} \varrho(k - k\sigma,\ \vartheta',\ \psi)\,(3\,v_1 v_2 - c)_{\vartheta=\vartheta'} \frac{d\sigma}{\sigma} -$$

$$- \int_0^{2\pi} d\psi \int_\alpha^{l} \varrho(k - k\sigma,\ \vartheta',\ \psi)\,(3\,v_1 v_2 - c)_{\vartheta=\vartheta'} \left(1 + \frac{1-\sigma}{p_\varepsilon}\right) d\sigma.$$

La seconde intégrale du second membre a une valeur limite finie pour $\lim \alpha = 0$. Pour que I_3 ait une valeur limite finie, il faut donc et il suffit que la première intégrale du même membre ait une valeur limite finie pour $\lim \alpha = 0$. Si ϱ conserve toujours le même signe, il suffit que pour chaque valeur de ϑ, $\varepsilon \geqq \vartheta \geqq 0$,

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_\alpha^{\chi} \varrho(k - k\sigma,\ \vartheta,\ \psi) \frac{d\sigma}{\sigma}$$

ait une valeur limite finie pour $\lim \alpha = 0$.

Quant à l'intégrale I_4 on trouvera de même, en posant

$$s = 1 + \sigma,$$

qu'elle a une limite finie pour $\lim \alpha = 0$ en même temps que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_\alpha^{\chi} \varrho(k + k\sigma,\ \vartheta,\ \psi) \frac{d\sigma}{\sigma}\cdot$$

Si la densité ϱ est continue, la valeur ϱ_k de ϱ au point P $(r = k,\ \vartheta = 0)$ est indépendante de ψ. Nous avons trouvé que si la densité est constante, par ex. $= \varrho_k$, $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ existe; par suite, dans les intégrales I_3 et I_4, on peut substituer $\varrho - \varrho_k$ à ϱ. D'où le théorème:

Théorème. *Soient*

(71)
$$\begin{cases} I'' = \displaystyle\int_\alpha^{l} \left|\varrho(k + k\sigma,\ \vartheta,\ \psi) - \varrho_k\right| \frac{d\sigma}{\sigma} \\ I''' = \displaystyle\int_\alpha^{l} \left|\varrho(k + k\sigma,\ \vartheta,\ \psi) - \varrho_k\right| \frac{d\sigma}{\sigma}, \end{cases}$$

ϱ_k étant une constante absolue, donc la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ est finie au point P, si pour toutes les valeurs de ϑ, telles que $\varepsilon \geq \vartheta \geq 0$, $\lim\limits_{\alpha=0} (I'' + I''')$ est finie.

§ 12. *Calcul de l'intégrale I_5.* Soient F_5 et G_5 les parties de F et de G (67) qui se rapportent à I_5. On peut écrire

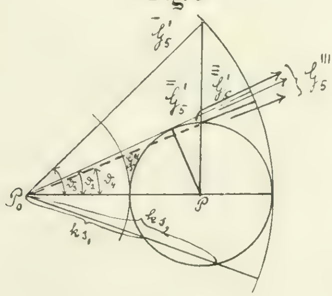
$$F = \frac{3}{4}\int \varrho'(\nu_1 \nu_2 - \zeta_1 \zeta_2)\, d\psi \int s\, ds \Big/ \left[p + \frac{2(s^2+1)}{p} - \frac{(s^2-1)^2}{3p^3}\right] - (3\nu_1\nu_2 - c)\int \varrho'' d\psi \int s\, ds \Big/ \frac{1}{p},$$

où ϱ' et ϱ'' sont deux valeurs moyennes de ϱ,

$$\therefore\ F_5 = -\left(\frac{16}{3} + 4\alpha^2\right)\int_0^{2\pi} \varrho'(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\, d\psi + 2\int_0^{2\pi} \varrho'(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\, d\psi \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \frac{s(s^2+s+1)}{1+s}\, ds +$$
$$+ 2(3\nu_1\nu_2 - c)\int_0^{2\pi} \varrho'' d\psi - (3\nu_1\nu_2 - c)\int_0^{2\pi} \varrho'' d\psi \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \frac{s\, ds}{1+s},$$

$$\therefore\ \lim_{\alpha=0} F_5 = -\frac{16}{3}\int_0^{2\pi} \varrho'(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\, d\psi + 2(3\nu_1\nu_2 - c)\int_0^{2\pi} \varrho'' d\psi.$$

Fig. 3.



Si la densité ϱ est continue par rapport à r et à ϑ, on aura $\varrho' = \varrho'' = \varrho(k, o, \psi)$. Si elle est continue aussi par rapport à ψ, les quantités ϱ' et ϱ'' sont indépendantes de ψ, et on trouvera

$$\lim_{\alpha=0} F_5 = -\tfrac{4}{3}\pi(3\nu_1\nu_2 - c)\varrho_k,$$

où ϱ_k est la densité au point P.

L'intégrale G_5 peut s'écrire (figg. 1 et 3)

$$G_5 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\vartheta_2}^{\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \varrho \mathbf{G} s^3 ds + \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\vartheta_2} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_{1-\alpha}^{s_1} \varrho \mathbf{G} s^3 ds +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\vartheta_2} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_{s_2}^{1+\alpha} \varrho \mathbf{G} s^3 ds = \int_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1) G'_5 d\psi + \int_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1) G''_5 d\psi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1) G'''_5 d\psi,$$

$$\sin\vartheta_2 = \alpha, \quad s_1 = \cos\vartheta - \sqrt{\alpha^2 - \sin^2\vartheta}, \quad s_2 = \cos\vartheta + \sqrt{\alpha^2 - \sin^2\vartheta}.$$

Or, on aura

$$G'_5 = \tfrac{3}{2}\bar{s}_1^3 \varrho_1 \int_{\vartheta_3}^{\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \left(\frac{s^2-1}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) ds + \tfrac{3}{2}\bar{s}_2^3 \varrho_2 \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_{1-\alpha}^{\frac{1}{u}} \left(\frac{s^2-1}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) ds +$$

$$+ \tfrac{3}{2} s_3^3 \varrho_3 \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_{\frac{1}{u}}^{1+\alpha} \left(\frac{s^2-1}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) ds \equiv \overline{G'_5} + \overline{\overline{G'_5}} + \overline{\overline{\overline{G'_5}}},$$

où $\bar{s}_1$, ϱ_1, $\bar{s}_2$, ϱ_2, s_3 et ϱ_3 sont des valeurs moyennes de s et de ϱ, et $\cos\vartheta_3 = \frac{1}{1+\alpha}$. De plus, on a

$$\tfrac{3}{2} \sin^2\vartheta \int \left(\frac{s^2-1}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) ds = -2\frac{s-u}{p} - \frac{s\sin^2\vartheta}{p^3},$$

$$\therefore \overline{G'_5} = \tfrac{3}{2}\bar{s}_1^3 \varrho_1 \int_{\varepsilon}^{\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \left(\frac{s^2-1}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) ds + \bar{s}_1^3 \varrho_1 \int_{\vartheta_3}^{\varepsilon} \left[\frac{2(1-u-\alpha)}{p_1} - \frac{2(1-u+\alpha)}{p_2}\right] d\vartheta -$$

$$- \bar{s}_1^3 \varrho_1 \alpha \int_{\vartheta_3}^{\varepsilon} \sin^2\vartheta \left(\frac{1}{p_1^3} + \frac{1}{p_2^3}\right) d\vartheta + \bar{s}_1^3 \varrho_1 \int_{\vartheta_3}^{\varepsilon} \sin^2\vartheta \left(\frac{1}{p_1^3} - \frac{1}{p_2^3}\right) d\vartheta,$$

où ε est une constante telle que $\frac{\pi}{2} > \varepsilon > \vartheta_3$, et où p_1 et p_2 sont les valeurs de p pour $s = 1 - \alpha$ et $s = 1 + \alpha$ resp., c. à. d.

$$(72)\quad \left\{\begin{aligned} & p_1 = \sqrt{2(1-u)(1-\alpha)+\alpha^2}, \quad p_2 = \sqrt{2(1-u)(1+\alpha)+\alpha^2}, \\ & \therefore \text{ les quantités } \frac{\alpha}{p_1}, \ \frac{\alpha}{p_2}, \ \frac{1-u}{p_1^2} \text{ et } \frac{1-u}{p_2^2} \text{ sont } \leq 1, \text{ et } p_1 < p_2. \\ & \qquad \text{De plus on a} \\ & p = \sqrt{(s-u)^2+\sin^2\vartheta} = \sqrt{(s-1)^2+2s(1-u)}, \\ & \therefore \frac{\sin\vartheta}{p} \leq 1, \ \frac{|s-u|}{p} \leq 1 \text{ et } \frac{|s-1|}{p} \leq 1. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, la première intégrale du second membre a une limite nulle pour $\lim \alpha = 0$. La seconde et la troisième ont chacune une limite pour $\lim \alpha = 0$ qui est plus petite qu'une constante finie multipliée par ε; mais la quantité ε peut être choisie est arbitrairement petite, $\therefore$ les limites de la seconde et de la troisième intégrale sont nulles. Quant à la quatrième intégrale, on a

$$\sin^2\vartheta\left(\frac{1}{p_1^3}-\frac{1}{p_2^3}\right) = \sin^2\vartheta\left(\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_1 p_2}+\frac{1}{p_2^2}\right)\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right) < 3\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right).$$

Posons

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} & \Gamma = \int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right) d\vartheta \\ & 2(1-u) = \vartheta^2\lambda(\vartheta), \ 0 < \lambda(\vartheta) \leq \lambda(0) = 1, \ \lambda'(\vartheta) < 0 \text{ pour } \varepsilon \geq \vartheta \geq 0, \\ & \therefore \ p_1 > \sqrt{\lambda(\vartheta)(1-\alpha)}\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}, \\ & \qquad p_2 < \sqrt{\lambda(\vartheta)(1+\alpha)}\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)\lambda(\varepsilon)}}. \end{aligned}\right.$$

$$\therefore \ \Gamma < \frac{1}{\sqrt{\lambda(\vartheta')}}\int_0^\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}} - \frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)\lambda(\varepsilon)}}}\right] d\vartheta + g,$$

où ϑ' est une valeur moyenne de ϑ, et $\lim\limits_{\alpha=0} g = 0$,

$$\therefore \ \Gamma < \frac{1}{\sqrt{\lambda(\vartheta')}}\left[\log\frac{\sqrt{\varepsilon^2+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}+\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2+\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)\lambda(\varepsilon)}}+\varepsilon} + \log\frac{\sqrt{\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)\lambda(\varepsilon)}}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}}\right] + g.$$

$$(74)\qquad \therefore \lim_{\alpha=0} \Gamma \leqq \frac{\mathrm{I}}{2\sqrt{\lambda(\varepsilon)}} \log \frac{1}{\lambda(\varepsilon)} \leqq e\varepsilon, \ \lim_{\varepsilon=0} e \text{ finie},$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} G'_5 = \mathrm{o}.$$

Pour $s=\frac{\mathrm{I}}{u}$ on a $p=\operatorname{tg}\vartheta$,

$$\therefore G'_5 = s_2^3\varrho_2 \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \left[\frac{2(\mathrm{I}-u-\alpha)}{p_1} - 2\sin\vartheta - \frac{\alpha\sin^2\vartheta}{p_1^3} - \frac{\mathrm{I}-u}{u}\cdot\frac{\sin^2\vartheta}{\operatorname{tg}^3\vartheta} + \sin^2\vartheta\left(\frac{\mathrm{I}}{p_1^3}-\frac{\mathrm{I}}{\operatorname{tg}^3\vartheta}\right)\right]d\vartheta,$$

et comme dans le cas précédent on trouvera que la limite de $\overline{\overline{G}}''_5$ pour $\lim \alpha = \mathrm{o}$ devient la même que celle de l'intégrale

$$s_2^3\varrho_2 \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \sin^2\vartheta\left(\frac{\mathrm{I}}{p_1^3}-\frac{\mathrm{I}}{\operatorname{tg}^3\vartheta}\right)d\vartheta = s_2^3\varrho_2\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left\{\frac{\vartheta^2}{\left[\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{I}-\alpha)\lambda(\vartheta)}\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{\mathrm{I}}{\vartheta}\right\}d\vartheta + g_1,$$

où $\lim\limits_{\alpha=0} g_1 = \mathrm{o}$. Posons

$$(75)\qquad \Gamma' \equiv \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left\{\frac{\mathrm{I}}{\vartheta}-\frac{\vartheta^2}{\left[\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{I}-\alpha)\lambda(\vartheta)}\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}d\vartheta.$$

$$\therefore \mathrm{o} < \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left\{\frac{\mathrm{I}}{\vartheta}-\frac{\vartheta^2}{\left[\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{\mathrm{I}-\alpha}\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}d\vartheta < \Gamma' < \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left\{\frac{\mathrm{I}}{\vartheta}-\frac{\vartheta^2}{\left[\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{I}-\alpha)\lambda(\vartheta_3)}\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}d\vartheta.$$

En effectuant les intégrations, on trouvera

$$\Gamma' < \log\frac{\vartheta_3}{\sqrt{\vartheta_3^2+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{I}-\alpha)\lambda(\vartheta_3)}}+\vartheta_3} + \log\frac{\sqrt{\vartheta_2^2+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{I}-\alpha)\lambda(\vartheta_3)}}+\vartheta_2}{\vartheta_2} +$$

$$+\frac{\vartheta_3}{\sqrt{\vartheta_3^2+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{I}-\alpha)\lambda(\vartheta_3)}}} - \frac{\vartheta_2}{\sqrt{\vartheta_2^2+\frac{\alpha^2}{(\mathrm{I}-\alpha)\lambda(\vartheta_3)}}}$$

et une formule analogue pour la limite inférieure.

En observant que

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\alpha}{\vartheta_3} = 0 \text{ et } \lim_{\alpha=0} \frac{\alpha}{\vartheta_2} = 1$$

on trouvera enfin

(76) $$\lim_{\alpha=0} \Gamma' = \log \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1) + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En supposant la densité ϱ continue par rapport à r et à ϑ, on aura

$$\lim_{\alpha=0} \overline{\overline{G}}'_5 = -\left[\log \frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1) + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\varrho_k,$$

où $\varrho_k = \varrho(k, o, \psi)$.

Par un calcul identique on trouvera

$$\lim_{\alpha=0} \bar{G}'_5 = -\lim_{\alpha=0} G'_5,$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} G'_5 = 0.$$

Dans l'intégrale G''_5 la fonction G ne change pas de signe, par conséquent nous pourrons écrire

$$G''_5 = -s_4^3 \varrho_4 \int_0^{\vartheta_2} d\vartheta \Big/_{1-\alpha}^{s_1} \left[\frac{2(s-u)}{p} + \frac{s \sin^2 \vartheta}{p^3}\right],$$

où s_4 et ϱ_4 sont des valeurs moyennes de s et de ϱ. Comme $\frac{|s-u|}{p}$ est toujours ≤ 1, la limite pour $\lim \alpha = 0$ de G''_5 est la même que la limite de l'intégrale

$$-s_4^3 \varrho_4 \int_0^{\vartheta_2} \left(\frac{\vartheta^2}{\alpha^3} - \frac{\vartheta^2}{p_1^3}\right) d\vartheta,$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} G''_5 = -\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \log(\sqrt{2} + 1)\right]\varrho_k.$$

Comme la fonction G change de signe dans l'intégrale G'''_5, il faut diviser G'''_5 en trois parties et écrire

$$G'''_5 = -s_5^3 \varrho_5 \int_{\vartheta_4}^{\vartheta_2} d\vartheta \Big/_{s_2}^{\frac{1}{u}} \left[\frac{2(s-u)}{p} + \frac{s \sin^2 \vartheta}{p^3}\right] - s_6^3 \varrho_6 \int_{\vartheta_4}^{\vartheta_2} d\vartheta \Big/_{\frac{1}{u}}^{1+\alpha} \left[\frac{2(s-u)}{p} + \frac{s \sin^2 \vartheta}{p^3}\right] -$$

$$- s_7^3 \varrho_7 \int_0^{\vartheta_4} d\vartheta \Big/_{s}^{1+\alpha} \left[\frac{2(s-u)}{p} + \frac{s \sin^2 \vartheta}{p^3}\right],$$

où $\operatorname{tg} \vartheta_4 = \alpha$, et où s_5, ϱ_5, s_6, ϱ_6, s_7 et ϱ_7 sont des valeurs moyennes de s et de ϱ. La différence $\vartheta_2 - \vartheta_4$ étant de l'ordre $\frac{\alpha^3}{2}$, on voit immédiatement que les deux premiers termes du second membre ont des limites nulles pour $\lim \alpha = 0$. La limite du troisième terme s'obtient de la même manière que pour G_5'', et on trouve ainsi

$$\lim_{\alpha=0} G_5''' = -\lim_{\alpha=0} G_5'';$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} G_5 = 0.$$

Mais

$$I_5 = F_5 + G_5,$$

$$(77) \qquad \therefore \lim_{\alpha=0} I_5 = \int_0^{2\pi} \varrho(k, 0, \psi)\left[2(3\, r_1 r_2 - c) - \frac{16}{3}(r_1 r_2 - \zeta_1 \zeta_2)\right] d\psi,$$

où nous avons supposé que la fonction ϱ est continue par rapport à r et à ϑ au point P $(r = k,\ \vartheta = 0)$. Si la valeur de ϱ y est indépendante de ψ, on aura

$$(78) \qquad \lim_{\alpha=0} I_5 = -\tfrac{4}{3}\pi(3\, r_1 r_2 - c)\varrho_k.$$

§ **13.** *Les intégrales I_3 et I_4.* L'intégrale I_3 peut s'écrire (63 et 67)

$$I_3 = F_3 + G_3$$

$$F_3 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{1-\varkappa}^{1-\alpha} s\,ds \int_{1-s}^{1+s} \varrho F dp = \int_0^{2\pi} d\psi \int_\alpha^\varkappa (1-\sigma)\,d\sigma \int_\sigma^{2-\sigma} \varrho F dp \text{ pour } s = 1 - \sigma.$$

Si l'on développe le dernier membre, on peut intégrer chaque terme par rapport à p pour une valeur moyenne de ϱ; puis on trouvera, en employant la relation $\sigma \leq p$, que tous les termes ont des limites finies pour $\lim \alpha = 0$, sauf peut-être la somme des termes qui proviennent de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_\alpha^\varkappa d\sigma \int_\sigma^{2-\sigma} \varrho\left[3\zeta_1\zeta_2 - c + 3(r_1 r_2 - \zeta_1\zeta_2)\frac{\sigma^2}{p^2}\right]\frac{dp}{p^2}.$$

De même, on peut écrire

$$I_4 = F_4 + G_4,$$

et, en posant $s = 1 + \sigma$, on aura un résultat analogue pour F_4. Par soite, on peut écrire

$$
(79)\quad\begin{cases}
F_3 + F_4 = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\varepsilon} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^{\varkappa} \Big\{ \varrho_- \left[\frac{3\zeta_1\zeta_2 - c}{p_-^3} + \frac{3(r_1 r_2 - \zeta_1\zeta_2)\sigma^2}{p_-^5} \right] + \\
\qquad\qquad + \varrho_+ \left[\dfrac{3\zeta_1\zeta_2 - c}{p_+^3} + \dfrac{3(r_1 r_2 - \zeta_1\zeta_2)\sigma^2}{p_+^5} \right] \Big\} d\sigma + f, \\
\text{oú } \lim\limits_{\alpha=0} f \text{ est finie, et} \\
\qquad \varrho_- = \varrho(k - k\sigma, \vartheta, \psi), \qquad \varrho_+ = \varrho(k + k\sigma, \vartheta, \psi) \\
\qquad p_- = \sqrt{2(1-u)(1-\sigma) + \sigma^2} \qquad p_+ = \sqrt{2(1-u)(1+\sigma) + \sigma^2}
\end{cases}
$$

D'une manière analogue on trouvera qu'on peut écrire

$$
(80)\quad\begin{cases}
G_3 + G_4 = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} (r_1 \zeta_2 + r_2 \zeta_1)\, d\psi \int_0^{\varepsilon} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^{\varkappa} \left[\varrho_- \frac{7\sigma^2 - 2\sigma}{p_-^5} + \varrho_+ \frac{7\sigma^2 + 2\sigma}{p_+^5} \right] d\sigma + g, \\
\text{où } \lim\limits_{\alpha=0} g \text{ est finie.}
\end{cases}
$$

Mais on a

$$u = \cos\vartheta = \frac{s^2 + 1 - p^2}{2s},$$

$$\therefore\ \sin^2\vartheta\, d\vartheta = \sqrt{(p^2 - 1 - s^2)(1 + s^2 - p^2)}\,\frac{p\,dp}{2s^2},$$

$$\therefore\ S = \int_0^{\varepsilon} \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^{\varkappa} \varrho \frac{\sigma^2}{p_-^5}\, d\sigma = \frac{1}{2}\int_\alpha^{\varkappa} \frac{\sigma^2}{(1-\sigma)^2}\, d\sigma \int_\sigma^{p_\varepsilon} \varrho \sqrt{(p^2 - \sigma^2)(2 - \sigma^2 - p^2)}\,\frac{dp}{p^4},$$

$$p_\varepsilon = \sqrt{2(1 - \cos\varepsilon)(1 - \sigma) + \sigma^2};$$

pour $p = \sigma q$ et $p_-^2 = \vartheta^2\lambda(\vartheta)(1 - \sigma) + \sigma^2$ on trouvera

$$S = \varrho(k - k\sigma', \vartheta', \psi)\sqrt{1 - \frac{\vartheta'^2\lambda(\vartheta')}{4}} \int_\alpha^{\varkappa} \frac{d\sigma}{(1-\sigma)^2} \int_1^{\frac{p_\varepsilon}{\sigma}} \sqrt{q^2 - 1}\,\frac{dq}{q^4},$$

σ' et ϑ' étant des valeurs moyennes de σ et de ϑ, $\varepsilon \geq \vartheta \geq 0$.

En effectuant les intégrations on aura

$$S = \tfrac{1}{3}\varrho(k - k\sigma', \vartheta', \psi)\sqrt{1 - \frac{\vartheta'^2\lambda(\vartheta')}{4}} \cdot \frac{\varepsilon\sqrt{\lambda(\varepsilon)}}{\cos^2\frac{1}{2}\varepsilon} \left[\frac{\varkappa}{p_\varkappa} - \frac{\alpha}{p_\alpha} + (1 - \cos\varepsilon)\left(\frac{1}{p_\alpha} - \frac{1}{p_\varkappa} \right) \right],$$

où $p_\varkappa = \sqrt{2(1-\cos\varepsilon)(1-\varkappa)+\varkappa^2}$, $p_\alpha = \sqrt{2(1-\cos\varepsilon)(1-\alpha)+\alpha^2}$,

$$\therefore\ |S| < \tfrac{2}{3}|\varrho|_{\max}\cdot\frac{\varepsilon}{\cos^2\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{81}$$

On trouvera donc facilement qu'on peut écrire

$$G_3 + G_4 = 3\int_0^{2\pi}(\nu_1\zeta_2+\nu_2\zeta_1)\,d\psi\int_0^{\varepsilon}\sin^3\vartheta\,d\vartheta\int_\alpha^{\varkappa}\left(\frac{\varrho_+}{p_+^5}-\frac{\varrho_-}{p_-^5}\right)\sigma\,d\sigma + g + \varepsilon g', \tag{82}$$

où $\lim\limits_{\alpha=0} g'$ est une quantité finie. Or cette formule (82) peut être simplifiée. En effet, on a identiquement

$$\frac{\varrho_+}{p_+^5}-\frac{\varrho_-}{p_-^5} = (\varrho_+-\varrho_-)\frac{1}{p'^5}-\varrho_+\left(\frac{1}{p'^5}-\frac{1}{p_+^5}\right)-\varrho_-\left(\frac{1}{p_-^5}-\frac{1}{p'^5}\right).$$

Posons

$$p' = \sqrt{2(1-u)+\sigma^2},$$

$$\therefore\ \int_0^{\varepsilon}\sin^2\vartheta\,d\vartheta\int_\alpha^{\varkappa}\left(\frac{1}{p'^5}-\frac{1}{p_+^5}\right)\sigma\,d\sigma = \tfrac{1}{3}\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1}{p_0^3}-\frac{1}{p_2^3}\right)\sin^2\vartheta\,d\vartheta + S',$$

où $\lim\limits_{\alpha=0} S'$ est finie, et $p_0 \equiv \sqrt{2(1-u)+\alpha^2}$. De plus on a

$$\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1}{p_1^3}-\frac{1}{p_2^3}\right)\sin^2\vartheta\,d\vartheta = \int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)\left(\frac{\sin^2\vartheta}{p_1^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{p_1p_2}+\frac{\sin^2\vartheta}{p_2^2}\right)d\vartheta < 3\,\Gamma,$$

$$\therefore\ \lim_{\alpha=0}\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1}{p_1^3}-\frac{1}{p_2^3}\right)\sin^2\vartheta\,d\vartheta \text{ finie.} \tag{83}$$

D'où il suit que

$$\lim_{\alpha=0}\int_0^{\varepsilon}\sin^2\vartheta\,d\vartheta\int_\alpha^{\varkappa}\left(\frac{1}{p'^5}-\frac{1}{p_+^5}\right)\sigma\,d\sigma = \text{une quantité finie.} \tag{84}$$

De même on trouvera

$$\lim_{\alpha=0}\int_0^{\varepsilon}\sin^2\vartheta\,d\vartheta\int_\alpha^{\varkappa}\left(\frac{1}{p_-^5}-\frac{1}{p'^5}\right)\sigma\,d\sigma = \text{une quantité finie.} \tag{85}$$

Si l'on pose

(86) $$\bar{p} = \sqrt{\vartheta^2 + \sigma^2},$$

on aura

$$\int_0^\varepsilon \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^\chi \left(\frac{1}{p'^5} - \frac{1}{\bar{p}^5}\right)\sigma\, d\sigma = \tfrac{1}{3}\int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{p_0'^3} - \frac{1}{\bar{p}_0^3}\right)\sin^2\vartheta\, d\vartheta + S'' < \Gamma'' + S'',$$

où $\lim\limits_{\alpha=0} S''$ est finie, $\bar{p}_0 = \sqrt{\vartheta^2 + \alpha^2}$ et

$$\Gamma'' = \int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{p_0'} - \frac{1}{\bar{p}_0}\right) d\vartheta.$$

$\lim\limits_{\alpha=0} \Gamma''$ est finie. En effet, posons $2(1-u) = \vartheta^2\lambda(\vartheta)$, $\vartheta = \alpha\varphi$, $1 \leqq w < \frac{\varepsilon}{\alpha}$,

$$\therefore\ \Gamma'' = \int_0^w \left[\frac{1}{\sqrt{\varphi^2\lambda(\alpha\varphi) + 1}} - \frac{1}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}\right] d\varphi + \int_w^{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda(\vartheta)}\sqrt{1 + \frac{1}{\varphi^2\lambda}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varphi^2}}}\right]\frac{d\varphi}{\varphi}.$$

La limite pour $\alpha = 0$ de la première intégrale du second membre est $= 0$. La seconde intégrale peut s'écrire

$$\int_{w\alpha}^\varepsilon \left[\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2\lambda(\vartheta)}} - \frac{1}{\vartheta}\right] d\vartheta + a,\ \lim_{\alpha=0} a = 0,$$

$$\therefore\ \lim_{\alpha=0} \Gamma'' = \int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} - \frac{1}{\vartheta}\right) d\vartheta = \log\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{4}\varepsilon}{\frac{1}{4}\varepsilon} = \beta\varepsilon,\ \lim_{\varepsilon=0}\beta \text{ finie, donc etc.}$$

En substituant

$$\frac{1}{p'^5} = \left(\frac{1}{p'^5} - \frac{1}{\bar{p}^5}\right) + \frac{1}{\bar{p}^5},$$

nous pourrons donc écrire (82)

$$(87)\qquad \left\{\begin{aligned} &G_3 + G_4 = 3\int_0^{2\pi}(r_1\zeta_2 + r_2\zeta_1)\,d\psi \int_0^\varepsilon \vartheta^2 d\vartheta \int_\alpha^\chi P_-\frac{\sigma\, d\sigma}{\bar{p}^5} + g_3,\ \lim_{\alpha=0} g_2 \text{ finie},\\ &P_- \equiv \varrho(k + k\sigma,\ \vartheta,\ \psi) - \varrho(k - k\sigma,\ \vartheta,\ \psi),\ \bar{p} = \sqrt{\vartheta^2 + \sigma^2}.\end{aligned}\right.$$

La formule (79) peut être simplifiée de la même manière. On aura

$$0 < \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \left(\frac{1}{p_-^3} - \frac{1}{p_+^3}\right) d\sigma = -\alpha \int_0^\pi \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} + f'' < f'',$$

où $\lim_{\alpha=0} f''$ est finie, ∴ la limite pour $\alpha = 0$ de la première intégrale est finie.

De plus on a

$$\frac{1}{p_-^3} - \frac{1}{p_+^3} > \frac{1}{p_-^3} - \frac{1}{p'^3}.$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\sigma^\varkappa \varrho \left(\frac{1}{p_-^3} - \frac{1}{p'^3}\right) d\sigma \text{ est finie.}$$

De même nous trouverons

$$0 < \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \left(\frac{1}{p'^3} - \frac{1}{p^3}\right) d\sigma = -\alpha \int_0^\pi \left(\frac{1}{p'_0} - \frac{1}{p_0}\right) \frac{d\vartheta}{\vartheta} + f''' < f''',$$

où $\lim_{\alpha=0} f'''$ est finie, ∴ la limite pour $\alpha = 0$ de la première intégrale est finie.

En intégrant par rapport à σ nous trouverons

$$\lim_{\alpha=0} \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\sigma^\varkappa \left(\frac{1}{p_-^5} - \frac{1}{p_+^5}\right) \sigma^2 d\sigma = \text{une quantité finie,}$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\sigma^\varkappa \varrho \left(\frac{1}{p_-^5} - \frac{1}{p'^5}\right) \sigma^2 d\sigma = \text{une quantité finie.}$$

Enfin nous aurons

$$0 < \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_\alpha^\varkappa \left(\frac{1}{p'^5} - \frac{1}{p^5}\right) \sigma^2 d\sigma = \int_\alpha^\varkappa \sigma^2 d\sigma \int_0^\varepsilon \left(\frac{\sin\vartheta}{p'^5} - \frac{\vartheta}{p^5}\right) d\vartheta + m, \text{ où } \lim_{\alpha=0} m \text{ est finie.}$$

En intégrant par rapport à ϑ, on trouvera que le second membre est $< m$, ∴ la première intégrale a une limite finie pour $\lim \alpha = 0$.

Des considérations analogues s'appliquent à l'intégrale F_4. D'où le résultat:

(88)
$$\begin{cases} F_3 + F_4 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int_{\alpha}^{\varkappa} P_+ \left\{ 3\,\zeta_1\zeta_2 - c + 3\,(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\frac{\sigma^2}{p^2} \right\} \frac{d\sigma}{p^3} + f_3 \\ \qquad P_+ \equiv \varrho(k + k\sigma, \vartheta, \psi) - \varrho(k - k\sigma, \vartheta, \psi), \end{cases}$$

où $\lim\limits_{\alpha=0} f_3$ est finie. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant $\alpha = 0$:

Théorème. *Soient*

(89)
$$\begin{cases} H_1 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int_{\alpha}^{\varkappa} P_+ \left[3\,\zeta_1\zeta_2 - c + 3\,(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\frac{\sigma^2}{p^2} \right] \frac{d\sigma}{p^3} \\ H_2 \equiv 3 \int_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1)\, d\psi \int_0^{\varepsilon} \vartheta^2 d\vartheta \int_{\alpha}^{\varkappa} P_- \sigma \frac{d\sigma}{p^5} \cdot \end{cases}$$

où les quantités ζ_1 et ζ_2 sont données par les équations (66), *et les quantités p, P_+ et P_- par les équations* (87), (79) *et* (89) *resp.; donc la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ ait une valeur finie au point $P(r = k,\ \vartheta = 0)$, est que*

(90)
$$H \equiv \lim_{\alpha=0}\ (H_1 + H_2) \text{ est finie.}$$

Remarque. Posons

$$\sigma = p \cos\gamma, \qquad \vartheta = p \sin\gamma, \qquad \cos\gamma = \tau,$$

donc nous pourrons mettre les fonctions H_1 et H_2 sous les formes

(91)
$$\begin{cases} H_1 = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\frac{\alpha}{\varepsilon}}^{1} \{3\,\zeta_1\zeta_2 - c + 3\,(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\tau^2\}\, d\tau \int_{\frac{\alpha}{\tau}} P_+ \frac{dp}{p} + a_1 \\ H_2 = 3 \int_0^{2\pi} (\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1)\, d\psi \int_0^{\gamma_1} \sin^2\gamma \cos\gamma\, d\gamma \int_{\frac{\alpha}{\tau}}^{\varepsilon} P_- \frac{dp}{p} + a_2, \end{cases}$$

où $\lim\limits_{\alpha=0} a_1$ et $\lim\limits_{\alpha=0} a_2$ sont finies, $\cos\gamma_1 = \frac{\alpha}{\varepsilon}\cdot$

Cas particulier. Soit ϱ une fonction indépendante de r, c. à. d. soit

$$\varrho = \varrho(\vartheta, \psi),$$

$$\therefore\ H_1 + H_2 = 2\int_0^{2\pi}(3\zeta_1\zeta_2 - c)\,d\psi\int_0^{\varepsilon}\varrho\left[\frac{\varkappa}{(\vartheta^2+\varkappa^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\alpha}{(\vartheta^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{d\vartheta}{\vartheta} +$$

$$+ 2\int_0^{2\pi}(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\,d\psi\int_0^{\varepsilon}\varrho\left[\frac{\varkappa^3}{(\vartheta^2+\varkappa^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\alpha^3}{(\vartheta^2+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

En intégrant pas rapport à ϑ pour des valeurs moyennes de ϱ, on trouvera qu'on peut écrire

$$(92)\qquad H_1 + H_2 = 2\int_0^{2\pi}(\nu_1\nu_2 - c + 2\zeta_1\zeta_2)\,d\psi\int_\alpha^{\varepsilon}[\varrho(\vartheta,\psi) - \varrho(0,0)]\frac{d\vartheta}{\vartheta} + \bar{a},$$

où $\lim\limits_{\alpha=0}\bar{a}$ est finie.

Corollaires. *La dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ *est finie,* 1° *si pour toutes les valeurs de* σ

$$(93)\qquad \lim_{\alpha=0}\int_0^{\varepsilon}|\varrho(k+k\sigma,\ \vartheta,\ \psi) - \varrho(k,\ 0,\ 0)|\,\frac{d\vartheta}{\vartheta}\ \textit{est finie},\ -\varkappa\leqq\sigma\leqq\varkappa,$$

ou 2° *si pour toutes les valeurs de* γ

$$(94)\qquad \lim_{\alpha=0}\int_\alpha^{\varepsilon}[\varrho(k+k\bar{p}\cos\gamma,\ \bar{p}\sin\gamma,\ \psi) - \varrho(k,\ 0\,0)]\frac{d\bar{p}}{\bar{p}}\ \text{est finie},\ 0\leqq\gamma\leqq\pi,$$

ou enfin 3° *si pour toutes les valeurs de* $\bar{p}$

$$(95)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{\alpha=0}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\gamma_1}|P_+\{3\zeta_1\zeta_2 - c + 3(\nu_1\nu_2 - \zeta_1\zeta_2)\cos^2\gamma\}\sin\gamma + \\ &\qquad + 3P_-(\nu_1\zeta_2 + \nu_2\zeta_1)\sin^2\gamma\cos\gamma|\,\log\frac{\cos\gamma}{\alpha}\,d\gamma\ \textit{est finie}, \\ &\qquad \alpha\leqq\bar{p}\leqq\varepsilon,\ \cos\gamma_1 = \frac{\alpha}{\varepsilon}. \end{aligned}\right.$$

§ **14.** *Continuité de la dérivée* $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$. Si la densité ϱ est continue, la fonction L_1 est continue (54), par suite la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s_1\,\partial s_2}$ est aussi continue pour tous

les points ($k > 0$) où la fonction K est finie et continue (42); elle est continue à l'origine, si $\lim\limits_{k=0} K = K_0$, où K_0 est la valeur de K à l'origine. Dans ce paragraphe, nous supposerons que la densité ϱ est toujours continue. Donc nous trouverons que pour $k > 0$ les quantités I_1, I_2 et $\lim\limits_{\alpha=0} I_5$ (63) sont continues par rapport à k. De plus nous trouverons que les limites pour $\alpha = 0$ de toutes les intégrales dont la somme est égale à

$$I_3 + I_4 - (H_1 + H_2),$$

sont continues par rapport à k pour $k \geq 0$ (§ 13). D'où l'on conclut que la fonction K est continue par rapport à k pour $k > 0$, si $\lim\limits_{\alpha=0} (H_1 + H_2)$ est finie et continue. Soient maintenant I_1^0, I_3^0, I_4^0 et I_5^0 ce que deviennent les intégrales I_1, I_3, I_4 et I_5, lorsqu'on y remplace ϱ par ϱ_0, et soit $I_2^0 = \lim\limits_{k=0} I_2$. Nous trouverons

$$(96)\qquad \begin{cases} I_1^0 = \frac{4}{3}\pi\varrho_0(3\,\nu_1\nu_2 - c)(1-\varkappa)^3 \\ \lim\limits_{\alpha=0} I_3^0 = \frac{4}{3}\pi\varrho_0(3\,\nu_1\nu_2 - c)[1 - \overline{1-\varkappa}^3] \\ I_4^0 = 0 \\ \lim\limits_{\alpha=0} I_5^0 = -\frac{4}{3}\pi\varrho_0(3\,\nu_1\nu_3 - c). \end{cases}$$

De plus nous aurons

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \varrho(3\,v_1 v_2 - c)\, s^2 \frac{ds}{p^3}$$

$$(3\,v_1 v_2 - c)\frac{s^2}{p^3} = (3\,u_1 u_2 - c)\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}Q,\ \lim_{s=\infty} Q \text{ finie},$$

et identiquement [(69) et § 4 ζ)]

$$\varrho_0 \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} (3\,v_1 v_2 - c)\, s^2 \frac{ds}{p^3} = 0\,.$$

D'où il suit qu'on peut écrire

$$(97) \qquad I_2^0 = \lim_{k=0} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} (3\,u_1\,u_2 - c) \sin \vartheta\, d\,\vartheta \int_k^a \varrho \frac{dr}{r} = K_0\,,$$

$$\therefore \lim_{\alpha=0} (I_1^0 + I_2^0 + I_3^0 + I_4^0 + I_5^0) = K_0\,.$$

Mais

$\lim\limits_{\alpha=0} (I_1 + I_2 + I_5)$ est finie et continue pour $k = 0$, si la quantité K_0 est finie, et
$\lim\limits_{\alpha=0} (I_3 + I_4)$ » » » » » $k = 0$ » » » $\lim\limits_{\alpha=0} (H_1 + H_2)$ est
finie et continue,

$$\therefore \lim_{k=0} \lim_{\alpha=0} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) = \lim_{\alpha=0} (I_1^0 + I_2^0 + I_3^0 + I_4^0 + I_5^0) = K_0$$

sous les mêmes conditions. Donc nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la densité ϱ est continue, la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ soit continue au point $P(r = k,\ \vartheta = 0,\ k > 0)$ pour un déplacement suivant l'axe $\vartheta = 0$ est que la quantité* (89)

$$(98) \qquad H \equiv \lim_{\alpha=0} (H_1 + H_2)$$

est finie et continue en ce même point pour le même déplacement. Pour que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ soit continue à l'origine il faut et il suffit qu'elle y soit finie, et de plus que

$$(99) \qquad \lim_{k=0} H = H^0,$$

où H^0 est la valeur de H à l'origine.

§ **15.** *Changement brusque de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ à la surface d'un corps. Surface plane.* Soient ϱ_1 et ϱ_2 les densités supposées continues de deux corps, et

$$(42) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2} = K + L_1\,.$$

Quand le point P se meut du corps dont la densité est ϱ_1 au corps dont la densité est ϱ_2, la quantité L_1 subit d'après (54) un changement brusque, dont la valeur est

(100) $$= -\tfrac{1}{3}\pi(\varrho_2 - \varrho_1)c\,.$$

Calculons la valeur de K dans le cas où la surface de séparation est plane, et où les densités ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes.

1:o. Le point P est situé dans le plan de séparation des deux corps. Dirigeons l'axe des y suivant la normale du plan vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1, et prenons cet axe pour axe des coordonnées polaires. Dans ce cas la fonction ϱ est indépendante de ψ; elle est $= \varrho_1$ pour $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, et $= \varrho_2$ pour $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$,

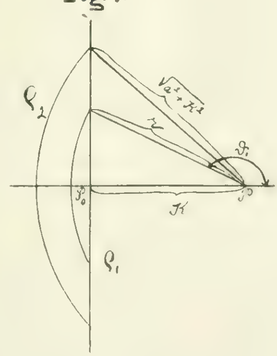
(101) $$\therefore\ K_h = \varrho_1 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\,u_1 u_2 - c)\ \sin\vartheta\, d\vartheta \int_h^a \frac{dr}{r} + \varrho_2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (3\,u_1 u_2 - c)\ \sin\vartheta\, d\vartheta \int_h^a \frac{dr}{r} = 0\,.$$

2:o. Si le point P est situé dans l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1 à la distance k du plan de séparation, nous prenons ce point comme origine des coordonnées polaires (fig. 4) et nous trouverons, en supposant $h < k$, cfr. (69)

$$K = \pi(3\,\mu_1\mu_2 - c)(\varrho_2 - \varrho_1)\int_k^{\sqrt{a^2+k^2}} \frac{dr}{r} \int_{\vartheta_1}^{\pi} (3\cos^2\vartheta - 1)\sin\vartheta\, d\vartheta + e,\ \cos\vartheta_1 = -\frac{k}{r},\ \lim_{k=0} e = 0,$$

$$\therefore\ K = \tfrac{2}{3}\pi(3\,\mu_1\mu_2 - c)(\varrho_2 - \varrho_1) + e_1,\ \lim_{k=0} e_1 = 0,$$

Fig. 4.



(102) $$\therefore\ K_1 \equiv \lim_{k=0} K = \tfrac{2}{3}\pi(3\,\mu_1\mu_2 - c)(\varrho_2 - \varrho_1).$$

De même on aura pour la limite de K de l'autre côté du plan de séparation

(103) $$K_2 = \tfrac{2}{3}\pi(3\,\mu_1\mu_2 - c)(\varrho_1 - \varrho_2).$$

La quantité K subit donc un changement brusque de

(104) $$-\tfrac{4}{3}\pi(3\,\mu_1\mu_2 - c)(\varrho_2 - \varrho_1).$$

D'où le

Thèorème. *Lorsque le point P traverse la surface depuis le corps dont la densité est* ϱ_1 *jusqu'au corps dont la densité est* ϱ_2, *la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *éprouve un changement brusque, dont la valeur est*

$$(105) \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\varrho_2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}\right)_{\varrho_1} = -4\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\mu_1\mu_2 .$$

Remarque I. *Ce changement est évidemment indépendant de la direction dans laquelle le point P s'approche de la surface.*

Remarque II. *Lorsque le point P se meut en partant du corps dont la densité est* ϱ_1 *et arrive dans la surface, la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *n'éprouve aucun changement brusque, si* μ_1 *est* > 0 (49), *tout le changement* (105) *ayant lieu lorsque le point P part de la surface et arrive dans le corps dont la densité est* ϱ_2.

§ **16.** *Changement brusque de la dérivée* $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ *à la surface d'un corps. Surface courbe.* Calculons maintenant la valeur de K dans le cas où la surface de séparation est courbe, les densités ϱ_1 et ϱ_2 étant toujours supposées constantes.

3:o. Le point P se trouve dans la surface elle-même. La valeur de K_h est donnée par les équations (cfr § 10)

$$(106) \quad \left\{ \begin{aligned} & K = \lim_{h=0} K_h \\ & K_h = (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi}(l + 3n)\,d\psi \int_h^a \sin\lambda \frac{dr}{r} + (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} m\,d\psi \int_h^a (1 - \cos^3\lambda)\frac{dr}{r} - \\ & \qquad - (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} n\,d\psi \int_h^a \sin^3\lambda \frac{dr}{r} \\ & l = 3\mu_1\mu_2 - c \\ & m = (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\cos\psi + (\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1)\sin\psi \\ & n = (\lambda_1\cos\psi + \nu_1\sin\psi)(\lambda_2\cos\psi + \nu_2\sin\psi) - \mu_1\mu_2 . \end{aligned} \right.$$

4:o. Le point P se trouve à l'intérieur du corps dont la densité est égale à ϱ_1 et s'approche indéfiniment du point P_0 de la surface (fig. 5). Prenons le point P comme origine et la droite P_0P comme axe des coordonnées polaires (r, ϑ, ψ). Posons $P_0P = k$, et soit k' la valeur minimum de r, $\therefore k' \leq k$. Dans ce cas il faut ajouter à l'expression de la quantité K du cas 2° le terme

(107)
$$\left\{\begin{aligned} I &= (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_{k'}^{k} \frac{dr}{r} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (3\,u_1 u_2 - c)\,\sin\,\vartheta\, d\vartheta\, + \\ &\quad + (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_k^a \frac{dr}{r} \int_{u'}^{1} (3\,u_1 u_2 - c)\, du + e_2 = I_1 + I_2 + e_2,\ \lim_{k=0} e_2 = 0, \end{aligned}\right.$$

où e_2 se rapporte au domaine ω (fig. 5), et où

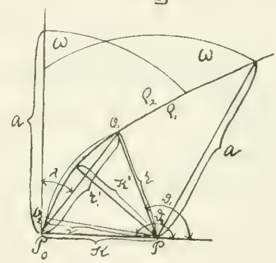
$$u = -\cos\vartheta$$

$$u' = \frac{k - r'\sin\lambda}{r}$$

$$r^2 = r'^2 - 2\,kr'\sin\lambda + k^2$$

$$\sin\vartheta_1 = \frac{r'}{r}\cos\lambda,$$

Fig: 5.



où $r' = P_0 Q$, Q étant un point de la surface, $\sin\lambda = \cos\,(P_0 Q,\ P_0 P)$, ϑ_1 et ϑ_2 sont les valeurs de ϑ qui correspondent aux points — supposés deux pour fixer les idées — où le cercle de rayon $r\,(k' < r \leqq k)$ coupe la section de la surface avec le plan $\psi = \text{const.}$ Nous supposerons

(108)
$$\lim_{k=0} \frac{k'}{k} > 0,$$

c. à. d. que le point P ne s'approche d'aucun autre point de la surface infiniment plus près que du point P_0. Dans ce cas

$$\lim_{k=0} I_1 \text{ est toujours finie (107).}$$

Pour l'étude de l'intégrale I_2 (107) nous posons

(109)
$$\left\{\begin{aligned} & r = kt,\ r' = kt' \\ & \therefore\ t^2 = t'^2 - 2\,t'\sin\lambda + 1 \\ & I_2 = (\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_1^{\frac{a}{k}} F\,\frac{dt}{t},\ \text{où} \\ & F = (l + 3\,n)\frac{t'}{t}\sin\lambda + m\left[\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{t'^3}{t^3}\cos^3\lambda\right] - n\left[\frac{1}{t^3} - \left(\frac{1 - t'\sin\lambda}{t}\right)^3\right]. \end{aligned}\right.$$

Décrivons dans le demi-plan $\psi = \text{const.}$ un demi-cercle sur $P_0 P$ comme diamètre, et soit Q_0 le point où la section de la surface coupe la circonférence du demi-cercle. De l'égalité

$$t^2 = t'^2 - 2\,t' \sin\lambda + 1$$

on trouvera pour tous les points de la courbe $P_0 Q_0$

$$t' = \sin\lambda - \sqrt{t^2 - \cos^2\lambda}\,,$$

et pour tous les points de la courbe au delà de Q_0

$$t' = \sin\lambda + \sqrt{t^2 - \cos^2\lambda}\,.$$

Pour $t > 1$ il faut toujours employer la dernière formule. Soit w une constante > 2, $\therefore$ pour

$$t^2 > w^2 - 2\,w \sin\lambda + 1 \equiv t_0^2$$

on aura $t' > w$. Nous écrivons, t_0 étant > 1,

$$(109^*) \qquad I_2 = (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} d\psi \int_1^{t_0} \frac{F\,dt}{t} + (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} d\psi \int_{t_0}^{\frac{a}{k}} \frac{F\,dt}{t} \equiv I'_2 + I''_2\,,$$

où $\lim\limits_{k=0} I'_2$ est finie. Pour des grandes valeurs de t nous pourrons écrire

$$F = D + \frac{1}{t} P, \text{ où } \lim_{t=\infty} P \text{ est finie, et}$$

$$(110) \qquad D = (l + 3n) \sin\lambda + m(1 - \cos^3\lambda) - n \sin^3\lambda\,.$$

De plus nous aurons

$$\frac{dt}{t} = \frac{(t' - \sin\lambda)\,dt' - t' \cos\lambda\, d\lambda}{t'^2 - 2\,t' \sin\lambda + 1} = \frac{dt'}{t'}\left[1 + \frac{1}{t'} P_1\right] - \cos\lambda \frac{d\lambda}{t'}\left[1 + \frac{1}{t'} P_2\right],$$

$\lim\limits_{t'=\infty} P_1$ finie, $\lim\limits_{t'=\infty} P_2$ finie.

D'où il suit

$$I''_2 = (\varrho_2 - \varrho_1) \int_0^{2\pi} d\psi \int_w^{\frac{a}{k}} D \frac{dt'}{t'} - k(\varrho_2 - \varrho_1) \int_{r'=wk}^{r'=a} D \cos\lambda \frac{d\lambda}{r'} + e_3, \ \lim_{k=0} e_3 \text{ finie.}$$

Nous faisons sur la surface l'hypothèse suivante

$$\text{(111)} \qquad \int_{r'=0}^{r'=a} |\lambda d\lambda| = \text{une quantité finie,}$$

$\therefore$ le second terme de l'expression de I_2'' reste finie pour $\lim k = 0$. La limite de la première intégrale est finie ou infinie, selon que la quantité K (106) est finie ou infinie. D'où le théorème:

Théorème. *Si le point P s'approche indéfiniment du point P_0 de la surface commune de deux corps dont les densités sont constantes, la limite vers laquelle tend la dérivée $\frac{d^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ au point P est finie ou infinie, en même temps que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ au point P_0 indépendamment de la direction de la droite P_0P, pourvu qu'au point P_0 la surface jouisse de la propriété (111) et que le point P ne s'approche pas infiniment plus près d'aucun autre point de la surface que du point P_0 (108).*

En supposant que cette limite soit finie, nous en examinerons maintenant la valeur. Posons

$$\frac{k'}{k} = \cos\lambda',$$

$$\therefore \; I_1 = -(\varrho_2 - \varrho_1)\int_0^{2\pi} d\psi \int_{\cos\lambda'}^{1} \frac{dt}{t} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} [(l + 3n)\cos\vartheta - m\sin^3\vartheta - n\cos^3\vartheta].$$

En supposant qu'au point P_0 la section de la surface ait une tangente bien déterminée, et en posant

$$\lim_{k=0} \lambda = \lambda_0, \; \lim_{k=0} \vartheta_1 = \vartheta_1^0 \text{ et } \lim_{k=0} \vartheta_2 = \vartheta_2^0,$$

nous trouverons

$$\lim_{k=0} \lambda' = \lambda_0, \; (\vartheta_1^0 + \lambda_0) + (\vartheta_2^0 + \lambda_0) = 2\pi$$

$$\cos(\vartheta_1^0 + \lambda_0) = \cos(\vartheta_2^0 + \lambda_0) = -\frac{\cos\lambda_0}{t}.$$

D'où l'on déduit en intégrant

$$
(112)\quad \begin{cases}
I_1^0 = \lim\limits_{k=0} I_1 = 2(\varrho_2 - \varrho_1)\int\limits_0^{2\pi} [(l+3n)A_1 + mB_1 + nC_1]\,d\psi \\
A_1 = -\sin^2\lambda_0 + \sin\lambda_0 \log\dfrac{1+\sin\lambda_0}{\cos\lambda_0} \\
B_1 = -\tfrac{1}{3}\sin\lambda_0\cos\lambda_0[4\cos^4\lambda_0 - 10\cos^2\lambda_0 + 3] - \cos^3\lambda_0\log\dfrac{1+\sin\lambda_0}{\cos\lambda_0} \\
C_1 = \tfrac{4}{3}\sin^6\lambda_0 - \sin^3\lambda_0\log\dfrac{1+\sin\lambda_0}{\cos\lambda_0}.
\end{cases}
$$

L'intégrale I_2 peut s'écrire

$$
I_2 = (\varrho_2 - \varrho_1)\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_1^{\frac{a}{k}} D\frac{dt}{t} + (\varrho_2 - \varrho_1)\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_1^{\frac{a}{k}} (F-D)\frac{dt}{t} \equiv \bar{I}_2 + \bar{\bar{I}}_2,
$$

$$
\therefore\ \bar{I}_2 = (\varrho_2 - \varrho_1)\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_1^{t_0} D\frac{dt}{t} + (\varrho_2 - \varrho_1)\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_{t_0}^{\frac{a}{k}} D\frac{dt}{t}.
$$

La limite pour $k = 0$ de la première intégrale du second membre est $=$

$$
-(\varrho_2 - \varrho_1)\int\limits_0^{2\pi} D_0 \log t_0\, d\psi,
$$

où $D_0 = \lim\limits_{k=0} D$. Quant à la seconde intégrale, nous écrivons

$$
\int\limits_{t_0}^{\frac{a}{k}} D\frac{dt}{t} = \int\limits_{w}^{\frac{a}{k}} D\frac{t' - \sin\lambda}{t'^2 - 2t'\sin\lambda + 1}\,dt' - \int\limits_{r'=wk}^{r'=a} D\cos\lambda\frac{t'}{t^2}\,d\lambda + e',\quad \lim_{k=0} e' = 0.
$$

La première intégrale du second membre peut s'écrire

$$
\int\limits_{w}^{\frac{a}{k}} D\left(\frac{t' - \sin\lambda}{t'^2 - 2t'\sin\lambda + 1} - \frac{1}{t'}\right)dt' + \int\limits_{w}^{\frac{a}{k}} D\frac{dt'}{t'}.
$$

La limite pour $k = 0$ du premier terme est $=$

$$= - D_0 \log \frac{t_0}{w},$$

et celle du second terme est (106) $=$

$$= K - D_0 \log w.$$

De plus on aura

$$\int_{r'=wk}^{r'=a} D \cos\lambda \frac{t'}{t^2} d\lambda = \int_{r'=wk}^{r'=w'k} D \cos\lambda \frac{t'}{t^2} d\lambda + \int_{t'=w'}^{t'=\frac{a}{k}} D \cos\lambda \frac{t'}{t^2} d\lambda,$$

où w' est une constante qui peut être supposée assez grande pour que la limite pour $k = 0$ du dernier terme soit plus petite qu'une quantité donnée d'avance. Dans le premier terme du second membre, la quantité $\frac{D}{\lambda} \cos\lambda \frac{t'}{t^2}$ est toujours finie et aura, pour $k = 0$, une limite finie $< \left| \left(\frac{D}{\lambda}\right)_0 \right| \frac{w'}{t_0^2}$, mais les limites de l'intégration pour $d\lambda$ sont infiniment petites, par suite, d'après la condition (111),

$$\lim_{k=0} \int_{r'=wk}^{r'=a} D \cos\lambda \frac{t'}{t^2} d\lambda = 0,$$

$$\therefore\ I_2^0 \quad \lim_{k=0} I_2 = K.$$

Pour l'évaluation de $\lim\limits_{k=0} I_2$, on n'a qu'à faire $k = 0$ dans cette intégrale, et nous trouverons après l'intégration

$$(113) \begin{cases} \bar{\bar{I}}_2^0 = \lim\limits_{k=0} \bar{\bar{I}}_2 = (\varrho_2 - \varrho_1) \displaystyle\int_0^{2\pi} [(l + 3n) A_2 + m B_2 + n C_2] \, d\psi \\ A_2 = - \left[1 - 2 \sin\lambda_0 + \log \dfrac{1 + \sin\lambda_0}{2} \right] \sin\lambda_0 \\ B_2 = - \frac{4}{3} + \log 2 + 2\frac{1}{3} \cos^3\lambda_0 \quad \cos\lambda_0 + \cos\lambda_0 \sin\lambda_0 - \frac{20}{3} \sin\lambda_0 \cos^3\lambda_0 + \\ \qquad\qquad + \frac{8}{3} \sin\lambda_0 \cos^5\lambda_0 + \cos^3\lambda_0 \log \dfrac{1 + \sin\lambda_0}{2} \\ C_2 = - \sin\lambda_0 + \sin^2\lambda_0 + 2\frac{1}{3} \sin^3\lambda_0 - \frac{8}{3} \sin^6\lambda_0 + \sin^3\lambda_0 \log \dfrac{1 + \sin\lambda_0}{2}. \end{cases}$$

D'où le résultat:

$$I^0 \equiv \lim_{k=0} I = I_1^0 + I_2^0 + K, \tag{114}$$

où il faut supprimer le terme I_1^0 du second membre, si λ_0 est < 0. Pour $\lambda_0 = 0$ nous trouverons $I_1^0 = I_2^0 = 0$,

$$\therefore\ I^0 = K. \tag{114*}$$

L'égalité (114*) indique que dans le cas considéré $\lim\limits_{k=0} \frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ diffère de la valeur de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}$ au point P_0 de la même quantité que si la surface avait été plane au point P_0, pourvu que la droite $P_0 P$ soit normale au plan tangent au même point P_0. Mais les quantités I_1^0 et $\bar{I}_2^0$ de l'égalité (114) ne dépendent que des directions de ds_1 et ds_2 et de la fonction $\lambda_0(\psi)$ qui restent les mêmes, si la surface est remplacée par le plan tangent. Par suite, la quantité $I^0 - K$ est la même pour la surface actuelle que pour un plan, même dans le cas où la droite $P_0 P$ a une direction quelconque oblique au plan tangent. Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si le point P s'approche indéfiniment du point P_0 de la surface commune de deux corps dont les densités sont constantes, suivant une droite qui ne touche par la surface, et si au point P_0 la surface jouit de la propriété* (111), *enfin, si elle y admet un plan tangent bien déterminée, donc* (§ 15 2° *Rem. II*)

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{P_0} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1} = 0, \text{ si } \mu_1 > 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = -4\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\mu_1\mu_2, \text{ si } \mu_1 \leqq 0, \text{ et} \\ &\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1} = -4\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\mu_1\mu_2, \end{aligned}\right. \tag{105*}$$

μ_1 et μ_2 étant les cosinus des angles que font les directions ds_1 et ds_2 avec la normale au point P_0 dirigée vers l'interieur du corps dont la densité est $= \varrho_1$

Remarque I. Si dans la quantité K_h rapportée au point P_0 (106) on pose $h = k$, on trouvera, en passant à la limite, que la quantité

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{P_0} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s_1\, \partial s_2}\right)_{\rho_1}$$

est finie, même dans le cas où ces deux termes deviennent infinis séparément. Sa valeur est donnée par les seconds membres des égalités (105*), augmentés dans le cas général par la quantité

$$-(I_1^0 + \bar{I}_2^0), \text{ équ. } (112, 113).$$

Remarque II. Soit la densité ϱ une fonction qui est continue dans chacun des deux corps, et soient ϱ_1 et ϱ_2 les limites vers lesquelles tend la fonction ϱ des deux côtés de leur surface commune au point P_0. Si ϱ_1 et ϱ_2 sont constantes, et si ϱ' est une fonction qui est $= \varrho - \varrho_1$ et $= \varrho - \varrho_2$ dans les deux corps resp., cette fonction est continue le long de la droite $P_0 P$ jusqu'au point P_0. Soit K' ce que déviendra la quantité K quand on y remplace ϱ par ϱ'. *Si la fonction ϱ' satisfait à la condition de continuité de K'* (99), donc le changement brusque de la quantité K au point P_0 reste le même que si les densités des deux corps avaient été ϱ_1 et ϱ_2 resp. Par suite, *le changement brusque de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ dans ce cas est le même que si les densités des deux corps avaient été constantes.*

§ **17.** *Équation de Poisson généralisée.* Si les trois dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ existent, nous pourrons écrire

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = K_x + L_x$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = K_y + L_y$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = K_z + L_z\,,$$

les quantités K_x, L_x etc. ayant des significations analogues à celles des K et des L des paragraphes précédents. On peut écrire

$$K_x = K_{hx} + \varepsilon_{hx},$$

où

$$K_{hx} = \int_{(h)}^{(a)} \varrho \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} d\tau$$

$$\lim_{h=0} \varepsilon_{hx} = 0$$

et des équations analogues pour K_y et K_z,

$$\therefore\ K_x + K_y + K_z = \int_{(h)}^{a} \varrho \Delta \frac{1}{r} d\tau + \varepsilon_{hx} + \varepsilon_{hy} + \varepsilon_{hz} = \varepsilon_{hx} + \varepsilon_{hy} + \varepsilon_{hz}.$$

Le premier membre étant indépendent de h, il faut que

$$\varepsilon_{hx} + \varepsilon_{hy} + \varepsilon_{hz} = 0$$

(115) $$\therefore\ K_x + K_y + K_z = 0\,,$$

d'où il suit (12)

(116) $$\begin{cases} \Delta V = L_x + L_y + L_z = \displaystyle\int\limits_{(\Omega)} \varrho_0[\varphi(u_x) + \varphi(u_y) + \varphi(u_z)]d\omega \\ \varphi(u) = 1 - 3u - 5u^2 - (3u^2 - 1)\log\dfrac{1-u}{2} \\ u_x = \cos(r, x),\ u_y = \cos(r, y),\ u_z = \cos(r, z)\,, \end{cases}$$

$d\omega$ étant l'élément de surface de la sphère de rayon unité décrite autour du point P comme centre; l'intégration s'étend sur toute cette surface (Ω).

L'égalité (116) *est la forme la plus générale de l'équation de Poisson.*

Si la densité ϱ est continue, on retrouve l'équation de Poisson ordinaire

(117) $$\Delta V = -4\pi\varrho\,.$$

Corollaire. *La fonction ΔV existe toujours, même si les dérivées $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ n'existent pas séparément, si on définit le symbole Δ de la manière suivante*

(118) $$\begin{cases} \Delta V = \lim\limits_{\substack{h_1=0\\h_2=0\\h_3=0}} \sum\limits_{xyz} \dfrac{1}{h_1}\left[\dfrac{\partial V(x+h_1, x, z)}{\partial x} - \dfrac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}\right], \\ \text{où } \lim\dfrac{h_\lambda}{h_\mu} \neq 0 \text{ et déterminée.} \end{cases}$$

En effet posons

(119) $$\begin{cases} \lim\dfrac{h}{h_1} = c_x,\quad \lim\dfrac{h}{h_2} = c_y,\quad \lim\dfrac{h}{h_3} = c_z \\ \therefore\ \Delta V = \sum\limits_{xyz} L_x + \lim\sum\limits_{xyz}\int\limits_{(\Omega)}(3u_x^2 - 1)d\omega\displaystyle\int_{h_1}^{h}\varrho\frac{dr}{r} = \sum\limits_{xyz} L_x + \sum\limits_{xyz}\log c_x\int\limits_{(\Omega)}\varrho_0(3u_x^2 - 1)d\omega. \end{cases}$$

Si la densité ϱ est continue, le second terme du second membre s'évanouit, et on retrouve l'égalité (117).

Exemple. Soit

$$\varrho = \frac{(\xi - x)^2}{r^2 \log \frac{1}{r}},$$

$$\therefore \ \varrho_0 = 0\,,$$

$$\therefore \ \Delta V = \sum L_x = 0\,,$$

quoique la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ soit infinie (20).

Cas particuliers. 1°. Si une des dérivées, par ex. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, existe, la fonction ΔV est indépendante de la constante c_x à cause de l'égalité (13).

2°. Si la somme $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ existe, donc $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ existe. En effet, dans ce cas la définition (118) de la fonction ΔV se réduit à

$$\Delta V = \lim_{h_1=0} \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial V(x+h_1, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}\right] + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right),$$

$\therefore$ la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ n'est pas infinie,

$$\therefore \int_{(\Omega)} \varrho_0 (3 u_x^2 - 1)\, d\omega = 0\,,$$

$\therefore$ la fonction ΔV est indépendante de la quantité c_x,

$\therefore$ la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ est finie et bien déterminée.

Valeur de ΔV à la surface d'un corps. Soit le point $P(x, y, z)$ un point de la surface de séparation de deux corps à densités constantes ϱ_1 et ϱ_2, où la surface a un plan tangent bien déterminé, et soient μ_x, μ_y et μ_z les cosinus des angles ϑ_x, ϑ_y et ϑ_z que font respectivement les axes des coordonnées avec la normale, dirigée vers l'intérieur du corps dont la densité est ϱ_1. Nous aurons (49)

$$(120) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta V &= -4\pi\varrho_1, \ \text{si} \ \mu_x > 0, \ \mu_y > 0, \ \mu_z > 0; \\ \Delta V &= -4\pi\varrho_1 - 4\pi(\varrho_2 - \varrho_1)\mu_z^2, \ \text{si} \ \mu_x > 0, \ \mu_y > 0, \ \mu_z < 0; \\ &= -4\pi(\varrho_1 \sin^2\vartheta_z + \varrho_2 \cos^2\vartheta_z), \ \ \pi \geq \vartheta_z \geq \frac{\pi}{2}; \\ \Delta V &= -4\pi\varrho_2 - 4\pi(\varrho_1 - \varrho_2)\mu_x^2, \ \text{si} \ \mu_x > 0, \ \mu_y < 0, \ \mu_z < 0; \\ &= -4\pi(\varrho_2 \sin^2\vartheta_x + \varrho_1 \cos^2\vartheta_x), \ \ 0 \leq \vartheta_x \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right.$$

Lorsque le point P traverse la surface en partant du côté où la densité est ϱ_1, la fonction ΔV éprouve un changement brusque, dont la valeur est

(121) $$(\Delta V)_{\rho_2} - (\Delta V)_{\rho_1} = -4\pi(\varrho_2 - \varrho_1).$$

Remarque. Lorsque le point P se meut en partant du corps dont la densité est ϱ_1 et arrive dans la surface, la fonction ΔV n'éprouve 1° aucun changement brusque, si μ_x, μ_y et μ_z sont tous >0; elle éprouve 2° un changement brusque de $-4\pi(\varrho_2-\varrho_1)\mu_z^2$, si μ_x et μ_y sont >0, mais $\mu_z<0$, et 3° de $-4\pi(\varrho_2-\varrho_1)(\mu_y^2+\mu_z^2)$, si μ_x est >0, mais μ_y et μ_z sont <0.

§ 18. **Application:** *Intégration de l'équation de Poisson.* Soit, ou point P, $d\tau'$ l'élément d'un volume T' quelconque, nous disons que

$$\lim_{h=0} \int_{(T')} K_h d\tau' \textit{ est toujours finie.}$$

En effet

$$\int_{(T')} K_h d\tau' = \int_{(T')} d\tau' \int_{(h)}^{(a)} \varrho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2} d\tau = \int^{(a)} \varrho(\xi, \eta, \zeta) d\tau \int_{(h)}^{(T')} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2} d\tau' = \int^{(a)} \varrho(\xi, \eta, \zeta) K'_h d\tau,$$

où

$$K'_h = \int_{(h)}^{T'} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2} d\tau'.$$

Pour K'_h la densité est constante et $=1$,

$$\therefore\ K' = \lim_{h=0} K'_h \text{ est finie,}$$

$$\therefore\ \lim_{h=0} \int_{(T')} K_h d\tau' = \int \varrho K' d\tau = \text{une quantité finie, c. q. f. d.}$$

Pour les trois coordonnées on a

$$\sum_{xyz} K_{xh} = 0,$$

$$\therefore\ \sum_{xyz} \lim_{h=0} \int_{(T')} K_{xh} d\tau' = 0.$$

D'autre part on a (42)

$$\int_{(T')} L d\tau' = \int_{(T')} d\tau' \int_{(\Omega)} \varrho_0 [u_2 \varphi(u_1) - c\chi(u_1)] d\omega = \int_{(\Omega)} [u_2 \varphi(u_1) - c\chi(u_1)] d\omega \int_{(T')} \varrho_0 d\tau'.$$

Mais la fonction ρ est supposée intégrable,

$$\therefore \int\limits_{(T')} \rho_0 d\tau' = \int\limits_{(T')} \rho d\tau' = m,$$

où m est une quantité qui est indépendante des directions (ϑ, ψ) et qui m peut être considérée comme la partie de la masse de la sphère (a) qui se trouve dans l'intérieur de l'espace T''; d'où l'on tire (54)

$$(122) \qquad \int\limits_{(T'')} L d\tau' = -\tfrac{4}{3}\pi c m.$$

Remarque I. Si l'on pose

$$\delta_x V = \frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial V(x+h_1, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}\right]$$

et deux expressions analogues pour y et z, on peut énoncer le théorème suivant:

La quantité $\sum\limits_{x y z} lim \int\limits_{(T')} \delta_x V d\tau'$ *existe toujours et est* $= -4\pi c m$. C'est le théorème de KRONECKER.[1]

Si l'on pose

$$\sum_{x y z} L_x = -4\pi\rho + \Theta,$$

on trouve d'après (122) pour chaque domaine T''

$$(123) \qquad \int\limits_{(T')} \Theta d\tau' = 0.$$

Définition. Une fonction $\Theta(x, y, z)$ qui pour chaque domaine T'' jouit de la propriété

$$\int\limits_{(T')} \Theta d\tau' = 0$$

nous nommerons dans la suite *une fonction à intégrale nulle.*

Corollaire. L'équation de Poisson généralisée (116) peut s'écrire de la manière suivante

[1] KRONECKER: «Zur Potential-Theorie» Journal de Crelle LXX, p. 246—8, 1869.

$$\Delta \dot{V} = -4\pi\varrho + \Theta,$$

où Θ est une fonction à intégrale nulle.

Inversement, on voit immédiatement qu'ou peut énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si on se donne l'équation*

$$\Delta V = -4\pi\varrho,$$

où ϱ est une fonction quelconque finie et intégrable, cette équation n'a en général aucune solution. Mais on peut toujours trouver une fonction Θ à intégrale nulle de manière que l'équation

$$\Delta V = -4\pi\varrho + \Theta \tag{124}$$

ait des solutions, si le symbole Δ est défini par l'égalité (118). *La solution la plus générale se trouve, si l'on pose* (119)

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\Theta} &= 4\pi\varrho + \sum_{xyz} L_x + \sum_{xyz} \log c_x \int_{(\Omega)} \varrho_0 (3u_x^2 - 1)\,\partial\omega \\ V &= \int \varrho \frac{d\tau}{r} + U, \end{aligned}\right. \tag{125}$$

où U est une fonction quelconque qui satisfait à l'équation

$$\Delta U = 0.$$

On peut ajouter.

La fonction complémentaire Θ à intégrale nulle ne peut être choisie que d'une seule manière.

En effet, soit Θ_1 une fonction inconnue à intégrale nulle, et supposons qu'elle soit déterminée de sorte qu'il existe une fonction V_1 qui satisfait à l'équation

$$\Delta V_1 = -4\pi\varrho + \Theta_1$$

et qu'elle est finie et continue ainsi que ses premières dérivées dans un certain domaine T_1. Considérons la fonction

$$v = V - V_1 + U_1,$$

où U_1 satisfait à l'équation

$$\Delta U_1 = 0,$$

et est déterminée de manière que $v = 0$ à la surface d'un domaine T' qui fait partie de T_1. La fonction v et ses premières dérivées sont finies et continues dans l'intérieur du domaine T'. Soit dn l'élément de la normale dirigée vers l'intérieur du domaine, on aura d'après le théorème de GREEN

$$\int\limits_{(T')} v \Delta v \, d\tau' = -\int\limits_{(\Omega')} v \frac{\partial v}{\partial n} d\omega' - \int\limits_{(T')} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] d\tau',$$

$d\omega'$ étant l'élément de la surface Ω' du domaine T'. Mais

$$\Delta v = \Theta - \Theta_1$$

$$\therefore \int\limits_{(T')} v \Delta v \, d\tau' = \int\limits_{(T')} v \overline{\Theta} \, d\tau' - \int\limits_{(T')} v \Theta_1 \, d\tau' = 0,$$

parce que $\overline{\Theta}$ et Θ_1 sont des fonctions à intégrale nulle. Nous imposons à V et V_1 la condition que $\frac{\partial V}{\partial n}$ et $\frac{\partial V_1}{\partial n}$ ne deviennent pas infinies sur la surface, ce qui est toujours permis, parce que le domaine T' peut être choisi de sorte qu'il n'ait aucune partie de sa surface commune à celle de T_1. Nous voulons de plus choisir la surface de T' telle que la quantité $\frac{dU_1}{dn}$ ne soit pas infinie, ce qui est toujours possible, parce que la fonction U_1 y est égale à la fonction continue $V_1 - V$. D'où il suit

$$\int\limits_{(\Omega')} v \frac{\partial v}{\partial n} d\omega' = 0$$

à cause de la condition $v = 0$ sur la surface,

$$\therefore \int\limits_{(T')} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] d\tau' = 0.$$

Les dérivées $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial z}$ étant continues, il faut que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

$$\therefore \quad v = \text{constante} = 0,$$

$$\therefore \quad \Delta v = \Theta - \Theta_1 = 0.$$

$$\therefore \quad \Theta_1 = \Theta, \text{ c. q. f. d.}$$

Remarque II. En général la fonction Θ dépend de la manière de laquelle le symbole Δ est défini. Si la fonction ϱ_0 est telle qu'en chaque point

$$\int_{(\Omega)} \varrho_0 (3 u_x^2 - 1) d\omega = 0,$$

et si l'on a deux équations analogues pour y et z, Θ ne dépend pas des constantes c_x, c_y et c_z.

Corollaires. Posons

$$\varrho' = \varrho - \frac{\Theta}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{xyz} L_x - \frac{1}{4\pi}\sum_{xyz} \log c_x \int_{(\Omega)} \varrho_0 (3u_x^2 - 1) d\omega \equiv -\frac{1}{4\pi}\sum_{xyz} L_x - \frac{1}{4\pi} C,$$

$$\therefore \ \Delta V = -4\pi\varrho'$$

$$V = \int \varrho' \frac{d\tau}{r} + U, \text{ où } \Delta U = 0,$$

$$\therefore \ \Delta V = \sum_{xyz} L'_x + \sum_{xyz} \log c_x \int_{(\Omega)} \varrho'_0 (3u_x^2 - 1) d\omega \equiv \sum_{xyz} L'_x + C',$$

où

$$L'_x = \int_{(\Omega)} \varrho'_0 \varphi(u_x) d\omega = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega)} \left(\sum_{xyz} L_{0x} + C\right)\varphi(u_x) d\omega$$

$$L_{0x} \equiv \lim_{r=0} L_x.$$

I $$\left\{\begin{aligned} &\therefore \ \sum_{xyz} L'_x + C' = -4\pi\varrho' = \sum_{xyz} L_x + C, \\ &\therefore \ \sum_{xyz} L_x = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega)} \left(\sum_{xyz} L_{0x} + C\right)\left(\sum \varphi(u_x)\right) d\omega + C' - C. \end{aligned}\right.$$

De plus on aura

$$\sum_{xyz} L'_x = \int_{(\Omega)} \varrho_0 \sum \varphi(u_x) d\omega - \frac{1}{4\pi}\int_{(\Omega)} \bar{\Theta} \sum_{xyz} \varphi(u_x) d\omega$$

$$\sum_{xyz} L_x = \int_{(\Omega)} \varrho_0 \sum \varphi(u_x) d\omega.$$

II $$\therefore \ \int_{\Omega} \bar{\Theta} \sum_{xyz} \varphi(u_x) d\omega = 0.$$

CHAPITRE II.

La dérivée première du potentiel d'une simple couche. Surface plane.

§ **19.** *Préliminaires.* On sait que les dérivées premières du potentiel d'une simple couche sont finies et continues tant qu'on ne s'approche pas indéfiniment de la surface. Pour étudier comment elles se comportent dans le voisinage de la surface et dans la surface elle-même, il suffit évidemment de considérer la partie d'elles qui se rapporte à une petite partie de la surface qui dans son intérieur renferme le point vers lequel on se rapproche indéfiniment, pourvu que ce point ne soit pas situé sur le bord de la surface. Ce dernier cas peut être traité de la même manière, en supposant la couche prolongée à l'autre côté du bord, mais y ayant une densité nulle. Pris dans toute sa généralité, le problème qui nous occupe à présent est le suivant:

Soit P_0 un point donné sur une surface, dont nous pouvons choisir une partie quelconque qui entoure le point P_0, et soit P_0PP_1 une courbe quelconque qui ne rencontre pas la surface, ni ne s'approche infiniment près d'elle qu'au point P_0; soit enfin

$$V = \int \frac{d\mu}{R},$$

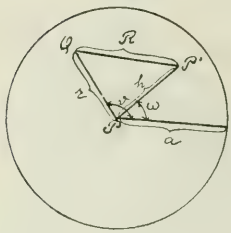
$d\mu$ étant, au point Q, l'élément de masse répandue sur la surface, R la distance PQ. L'intégrale est prise sur toute la masse de la partie considérée de la surface donnée. Si, au point P, ds est l'élément d'une courbe quelconque qui passe par ce point, nous voulons étudier ce que deviendra la limite

$$\lim_{P=P_0} \frac{\partial V}{\partial s}.$$

Cependant il faut étudier séparément le cas, où la courbe P_0PP_1 se réduit à un point, c. à. d. le cas où le point P est fixe et situé dans la surface. Nous commençerons l'étude par le cas, où la partie considérée de la surface est plane.

§ **20.** *Le point P est situé dans la surface. Dérivée tangentielle.* Considérons (fig. 6) un cercle de rayon a décrit autour du point P comme centre. Le potentiel V_h de ce cercle au point P', situé dans le plan et ayant les coordonnées polaires (h, ω), s'obtient par l'équation

Fig. 6.



$$V_h = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \frac{\sigma\, r\, dr}{\sqrt{r^2 - 2rhu + h^2}}, \quad u = \cos(\vartheta - \omega),$$

σ étant la densité de la masse, c. à d. une fonction donnée quelconque que nous voulons supposer finie; r et ϑ étant les coordonnées polaires du point Q, où la densité est σ. Le potentiel au point P est

$$V = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma\, dr$$

$\therefore$ pour $r = ht$

$$\frac{1}{h}(V_h - V) = \frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma(r, \vartheta)\left[\frac{r}{\sqrt{r^2 - 2rhu + h^2}} - 1\right] dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht, \vartheta)\left[\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2tu + 1}} - 1\right] dt.$$

L'intégrale du dernier membre reste finie, quoique t devienne $= 1$ sous le signe $\int$, car on sait que le potentiel V_h est fini et déterminé dans tout point P' de la surface; elle ne peut donc devenir infinie, ni indéterminée, que pour $\lim h = 0$. Pour $t > 1$ on a

$$\frac{t}{\sqrt{t^2 - 2tu + 1}} - 1 = \frac{u}{t} + \frac{1}{t^2} P, \quad \lim_{t=\infty} P \text{ finie};$$

par suite on conclut que la quantité

$$\frac{1}{h}(V_h - V) - \int_0^{2\pi} u\, d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \sigma \frac{dt}{t}$$

a une valeur limite finie pour $\lim h = 0$. Donc nous pourrons écrire

$$(126)\begin{cases} \frac{1}{h}(V_h - V) = T_h + M_h \\ T_h = \int_0^{2\pi} u\,d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\frac{dr}{r} \\ M_h = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sigma(ht,\vartheta)\left[\frac{t}{\sqrt{t^2-2tu+1}} - 1\right]dt + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\vartheta)\left[\frac{t}{\sqrt{t^2-2tu+1}} - 1 - \frac{u}{t}\right]dt. \end{cases}$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si* $\lim_{h=0} T_h$ *est finie, donc la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *dans la direction* ω *est finie.*

Supposons que pour chaque direction ϑ la fonction $\sigma(r,\vartheta)$ ait une valeur limite déterminée pour $\lim r = 0$, et posons

$$(127)\qquad \sigma_0(\vartheta) = \lim_{r=0} \sigma(r,\vartheta).$$

Si nous supposons de plus que $\sigma_0(\vartheta)$ est une fonction intégrable de ϑ, nous trouverons en passant à la limite

$$(128)\begin{cases} \frac{dV}{ds} = T + M \\ T = \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} u\,d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\frac{dr}{r} \\ M = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,\chi(u)\,d\vartheta \\ \chi(u) = -\left[1 + u + u\log\frac{1-u}{2}\right] = \frac{\partial X(\vartheta)}{\partial \vartheta} \\ X(\vartheta) = -\sin(\vartheta-\omega)\log\frac{1-u}{2} \\ u = \cos(\vartheta - \omega). \end{cases}$$

Remarque. Si la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ existe pour deux directions ω_1 et ω_2 ($\omega_1 \neq \omega_2$, $\omega_1 + \omega_2 \neq \pi$), elle existe pour toutes.

Cas particulier. Si la densité σ est continue, la fonction σ_0 est constante, et on trouvera

$$(129)\qquad M = 0.$$

Corollaire. Si T existe, on trouvera

$$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, u\, d\vartheta = 0. \tag{130}$$

§ **21.** *Le point P est situé dans la surface. Dérivée oblique à la surface.* Nous supposerons maintenant que le point P' est situé au dessus du plan. Soient $PP' = h$, l'angle que fait PP' avec le plan $= \psi$ et l'angle que fait la projection de PP' dans le plan avec une direction fixe dans le plan $= \omega$. Nous retrouverons les formules du § précédent seulement avec la modification qui se rapporte à l'expression de

$$u = \cos(PQ, PP');$$

$$(131)\quad \left\{ \begin{aligned} &\therefore\ u = \cos\psi \cos(\vartheta - \omega) \\ &\frac{\partial V}{\partial s} = T' + M' \\ &T' = \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} u\, d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} \\ &M' = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \chi(u)\, d\vartheta \\ &\chi(u) = -\left[1 + u + u \log\frac{1-u}{2}\right] \equiv \frac{\partial X_1(\vartheta)}{\partial \vartheta} \\ &X_1(\vartheta) = -\cos\psi \sin(\vartheta - \omega) \log\frac{1-u}{2} - \sin^2\psi \int \frac{d\vartheta}{1-u}. \end{aligned} \right.$$

Remarque I. La quantité M' contenant l'angle ψ sous le signe $\int$, on voit qu'en général il n'y a pas de relation simple entre les dérivées dans des directions différentes. Pour $\psi = 0$ les formules (131) deviennent identiques aux formules (128).

Remarque II. La quantité T' diffère seulement d'un facteur constant de la quantité correspondante T du paragraphe précédent, par suite, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ dans une direction quelconque est la même que pour la dérivée, prise suivant la projection de l'élément ds. Seulement la dérivée normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ existe toujours, et on a

(132) $$\frac{\partial V}{\partial n} = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Cas particulier. Si la densité σ est continue, on trouvera

(133) $$\frac{\partial V}{\partial s} = -2\pi\sigma\sin\psi + T', \quad \frac{\pi}{2} \geq \psi \geq 0.$$

Dérivée curviligne. Si le point P' se meut vers P suivant une courbe quelconque, on aura les mêmes formules que précédemment, si on y suppose que ψ et ω sont les valeurs limites de ces quantités. Par ex., si la courbe PP' est tangente au plan, la valeur limite de ψ devient $= 0$, et on retrouve les formules du § 20. D'autre part, si

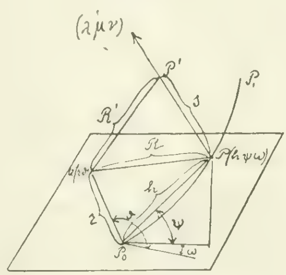
$$\lim_{h=0} \psi = \frac{\pi}{2}$$

la dérivée curviligne $\frac{\partial V}{\partial n}$ n'existe pas toujours. Mais elle existe dans tous les cas où la courbe PP' a un contact avec la normale d'un tel ordre que

(134) $\lim_{h=0} \cos\psi \log h$ n'est pas infinie ni indéterminée.

§ **22.** *Le point P partant au dessus du plan, s'approche de la surface suivant une courbe P_0PP_1 qui ne la rencontre qu'au point P_0 sans l'y toucher.* Soient (fig. 7) h, ψ et ω les coordonnées du point P, de manière que $h =$ la droite P_0P, $\psi =$ l'angle que fait P_0P avec le plan, et $\omega =$ l'angle que fait la projection de P_0P dans le plan avec une droite fixe dans le plan. Si les coordonnées du point Q de la couche sont r et ϑ, on aura

Fig. 7.



$$R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rhu + h^2}$$
$$u = \cos\psi\cos(\vartheta - \omega).$$

Soit P' un point pris dans le voisinage de P et posons

$$s = PP'.$$

Soient de plus λ, μ et $\nu =$ les cosinus directeurs de PP',

$$\therefore\ R' = P'Q = \sqrt{R^2 - 2Rsv + s^2}$$

$$(135)\quad \begin{cases} v \equiv \cos(PQ,\ PP') \\ \quad = -\dfrac{1}{R}\{\lambda(h\cos\psi\cos\omega - r\cos\vartheta) + \mu(h\cos\psi\sin\omega - r\sin\vartheta) + \nu h\sin\psi\} \end{cases}$$

$$\therefore\ R'\frac{\partial R'}{\partial s} = s - Rv.$$

En posant $s = 0$ on trouvera

$$(136)\qquad \frac{\partial R}{\partial s} = -v.$$

Soit V_h la valeur du potentiel V dans le point P, on aura

$$\frac{\partial V_h}{\partial s} = -\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma \frac{r}{R^2}\frac{\partial R}{\partial s}\, dr = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma r v \frac{dr}{R^2}.$$

On peut écrire

$$(137)\qquad \begin{cases} r = ht,\ \sqrt{t^2 - 2tu + 1} = q \\ v = -\dfrac{\beta_1}{q} + \beta_2 \dfrac{t}{q} \\ \beta_1 = \lambda\cos\psi\cos\omega + \mu\cos\psi\sin\omega + \nu\sin\psi \\ \beta_2 = \lambda\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta \\ \therefore\ \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = -\beta_1 \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\vartheta)\frac{t\,dt}{q^3} + \int_0^{2\pi} \beta_2\, d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\vartheta)\frac{t^2\,dt}{q^3}. \end{cases}$$

L'angle ψ ayant une valeur limite > 0, la quantité q ne peut pas devenir infiniment petite; la première des intégrales du second membre a donc une limite finie pour $\lim h = 0$. Quant à la deuxième, on a pour $t > 1$

$$\frac{t^2}{q^3} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}P,\ \lim_{t=\infty} P \text{ finie}.$$

Nous pourrons donc écrire

$$(138)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = U_h + N_h \\[2ex] U_h = \displaystyle\int_0^{2\pi} \beta_2 d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\,\vartheta)\frac{dr}{r} \\[2ex] N_h = -\beta_1 \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\,\vartheta)\frac{t\,dt}{q^3} + \int_0^{2\pi} \beta_2 d\vartheta \int_0^1 \sigma t^2 \frac{dt}{q^3} + \int_0^{2\pi} \beta_2 d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \sigma\left(\frac{t^2}{q^3} - \frac{1}{t}\right) dt. \\[2ex] \text{où } \lim\limits_{h=0} N_h \text{ est finie.} \end{cases}$$

D'où le théorème:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V}{\partial s}$ *soit finie, est que la quantité*

$$U \equiv \lim_{h=0} U_h \text{ est finie } (138).$$

Supposons que pour chaque direction ϑ la fonction $\sigma(r,\,\vartheta)$ ait une valeur limite déterminée pour $\lim r = 0$, et posons

$$(127)\qquad \sigma_0(\vartheta) = \lim_{r=0} \sigma(r,\,\vartheta).$$

Si nous supposons de plus que $\sigma_0(\vartheta)$ est une fonction intégrable de ϑ, nous trouverons, en passant à la limite,

$$(139)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V}{\partial s} = U + N \\[2ex] U = \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} \beta_2 d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\,\vartheta)\frac{dr}{r} \\[2ex] N = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,\Theta(u_0)\,d\vartheta \\[2ex] \Theta(u_0) \equiv -\dfrac{\beta_{10}}{1-u_0} + \beta_2\left[\dfrac{1}{1-u_0} - 2 - \log\dfrac{1-u_0}{2}\right] = \dfrac{dG(\vartheta)}{d\vartheta} \\[2ex] G(\vartheta) \equiv (-\lambda\sin\vartheta + \mu\cos\vartheta)\left[1 + \log\dfrac{1-u_0}{2}\right] - \nu\sin\psi_0 \displaystyle\int \frac{d\vartheta}{1-u_0}. \end{cases}$$

$$(140)\quad \begin{cases} \text{où } u_0 = \cos\psi_0 \cos(\vartheta - \omega_0) \\ \beta_{10} = \lambda \cos\psi_0 \cos\omega_0 + \mu \cos\psi_0 \sin\omega_0 + \nu \sin\psi_0 \\ \beta_2 = \lambda \cos\vartheta + \mu \sin\vartheta \\ \psi_0 = \lim_{h=0} \psi, \quad \omega_0 = \lim_{h=0} \omega. \end{cases}$$

Si nous prenons l'axe des z normal au plan, nous pourrons écrire

$$(141)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = \lambda \dfrac{\partial V_h}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial V_h}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial V_h}{\partial z} \\ G(\vartheta) = \lambda G_x(\vartheta) + \mu G_y(\vartheta) + \nu G_z(\vartheta) \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial x} = U_x + N_x \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial y} = U_y + N_y \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial z} = N_z \\ U_x \equiv \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \, d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} \\ U_y \equiv \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} \\ N_x \equiv \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \frac{dG_x(\vartheta)}{d\vartheta} d\vartheta \\ N_y \equiv \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \frac{dG_y(\vartheta)}{d\vartheta} d\vartheta \\ N_z \equiv \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \frac{dG_z(\vartheta)}{d\vartheta} d\vartheta \\ G_x \equiv -\sin\vartheta \left\{ 1 + \log \dfrac{1 - u_0}{2} \right\} \\ G_y \equiv \quad \cos\vartheta \left\{ 1 + \log \dfrac{1 - u_0}{2} \right\} \\ G_z \equiv -\sin\psi_0 \displaystyle\int \frac{d\vartheta}{1 - u_0}. \end{cases}$$

D'où le théorème

Théorème. $\lim\limits_{h=0} \frac{d V_h}{dz}$ *existe toujours.*

Corollaires. On trouvera

$$(142) \quad \begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\beta_2 d\vartheta = 0, & \text{si} \quad U \quad \text{existe,} \\ \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\cos\vartheta d\vartheta = 0, & \text{si} \quad U_x \text{ existe,} \\ \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = 0, & \text{si} \quad U_y \text{ existe.} \end{cases}$$

Cas particuliers. 1°. Si la densité σ est continue, on aura

$$(143) \quad \begin{cases} N_x = N_y = 0 \\ \lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial x} = U_x \\ \lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial y} = U_y \\ \lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z} = -2\pi\sigma. \end{cases}$$

Remarque I. On trouvera que les formules (143) sont identiques à la formule (133) pour $\psi = 0$, 0 et $\frac{\pi}{2}$ resp.

2°. Si $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$, on trouvera

$$(144) \quad \begin{cases} N_x = N_y = 0 \text{ d'après (142) et} \\ \lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z} = -\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) d\vartheta. \end{cases}$$

3°. La limite de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ prise dans la direction de la tangente au point P_0 de la courbe P_0PP_1 s'obtient en posant

$$\lambda = \cos\psi_0 \cos\omega_0, \quad \mu = \cos\psi_0 \sin\omega_0, \quad \nu = \sin\psi_0.$$

$$\therefore \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = u_0,$$

$$(145) \quad \begin{cases} \therefore \lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s} = \lim\limits_{h=0} \int\limits_0^{2\pi} u_0 d\vartheta \int\limits_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} - \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[1 + 2u_0 + u_0 \log \frac{1 - u_0}{2}\right] d\vartheta \\ u_0 = \cos\psi_0 \cos(\vartheta - \omega_0). \end{cases}$$

Remarque II. Si $\lim_{h=0}\int_{u_0}^{2\pi} u_0 d\vartheta \int_h^a \sigma \frac{dr}{r}$ existe, les formules (145) deviennent identiques aux formules (131) en vertu des formules (142).

On pourra donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la dérivée dans une certaine direction extérieure existe pour un point P_0 situé dans la surface, donc la dérivée dans la même direction pour un point P en dehors de la surface prend la même valeur limite, c. à. d.*

$$\lim_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial s}=\frac{\partial V}{\partial s}$$

dans les deux cas suivants:

1° *si la densité σ est continue au point P_0,*

2° *si la dérivée est prise dans la direction de la tangente au point P_0 à la courbe P_0PP_1.*

Remarque III. Dans le cas général $\lim_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial s}$ (139) n'est pas $=\frac{\partial V}{\partial s}$ (131), car la première quantité dépend non seulement de la direction (λ, μ, ν) de l'élément ds, mais aussi de la direction (ψ_0, ω_0) de la tangente au point P_0 de la courbe P_0PP_1.

§ **23.** *La courbe P_0PP_1 touche le plan au point P_0.* Dans ce cas $\lim_{h=0}\psi=0$; par conséquent la quantité q des formules (137) devient infiniment petite sous le signe $\int$ pour $h=0$, $\vartheta=\omega$ et $t=1$. Nous supposerons pour plus de simplicité que l'angle ω est constant. Posons $\omega=0$, $\therefore\ u=\cos\psi\cos\vartheta$. Les formules (138) peuvent s'écrire

$$(146)\qquad \begin{cases} \frac{\partial V_h}{\partial s}=\lambda\frac{\partial V_h}{\partial x}+\mu\frac{\partial V_h}{\partial y}+\nu\frac{\partial V_h}{\partial z} \\ \frac{\partial V_h}{\partial x}=U_{xh}+N_{xh} \\ \frac{\partial V_h}{\partial y}=U_{yh}+N_{yh} \\ \frac{\partial V_h}{\partial z}=N_{zh}, \end{cases}$$

où nous aurons à discuter les quantités N_{xh}, N_{yh} et N_{zh}.

1° N_{xh}. On peut écrire (138)

$$N_{xh}=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta\int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa}\sigma(ht,\vartheta)[t\cos\vartheta-\cos\psi]\,t\frac{dt}{q^3}+N'_x,\ \lim_{h=0}N'_x \text{ finie,}$$

où ε et ε' sont des quantités positives $< \frac{\pi}{2}$, $0 < \varkappa < 1$, et où $\sigma(r, -\vartheta)$ est écrite pour $\sigma(r, 2\pi - \vartheta)$. De plus, on aura

$$\frac{t^2 \cos \vartheta - t \cos \psi}{q^3} = \frac{t}{\cos \psi} \cdot \frac{\sin^2 \psi}{q^3} - \frac{t^2}{\cos \psi} \frac{1-u}{q^3} + \frac{1}{\cos \psi} \frac{(t-1)^2}{q^3} + \frac{1}{\cos \psi} \frac{t-1}{q^3},$$

$\frac{1-u}{q^2} < 1$ et $\frac{\sin \psi}{q} < 1$, parce que

$$q = \sqrt{(t-1)^2 + 2t(1-u)} = \sqrt{(t-u)^2 + 1 - u^2} = \sqrt{(t-u)^2 + \sin^2 \psi + \sin^2 \vartheta \cos^2 \psi}.$$

$$\therefore N_{xh} = \frac{1}{\cos \psi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht, \vartheta)(t-1) \frac{dt}{q^3} + N''_x, \lim_{h=0} N''_x \text{ finie.}$$

Pour que $\lim\limits_{h=0} N_{xh}$ soit finie, il faut donc que le premier terme du second membre ait une limite finie pour $\lim h = 0$. Soit

$$O'_{xh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht, \vartheta)(t-1) \frac{dt}{q^3},$$

et posons d'une part $t = 1 - \tau$, $q_1 = \sqrt{2(1-u)(1-\tau) + \tau^2}$,

et de l'autre $t = 1 + \tau$, $q_2 = \sqrt{2(1-u)(1+\tau) + \tau^2}$,

$$\therefore O'_{xh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_0^{\varkappa} \left[\frac{\sigma(h + h\tau, \vartheta)}{q_2^3} - \frac{\sigma(h - h\tau, \vartheta)}{q_1^3}\right] \tau \, d\tau .$$

Si nous posons

$$q' = \sqrt{2(1-u) + \tau^2}, \quad \therefore q_1 \leqq q' \leqq q_2,$$

nous trouverons en intégrant

$$\int_0^{\varkappa} \left(\frac{1}{q_1{}^3} - \frac{1}{q'^3}\right) \tau \, d\tau = \text{une quantité toujours finie, même pour } \psi = \vartheta = 0,$$

et nous aurons un résultat analogue pour q_2. Dans l'expression de O_{xh} on pourra donc remplacer q_1 et q_2 par q'.

Posons

$$u = \cos \delta,$$

donc nous pourrons de même remplacer q' par

$$q = \sqrt{\delta^2 + \tau^2}.$$

D'où le résultat:

Théorème: *La condition nécessaire et suffisante pour que la quantité* $\lim_{h=0} N_{xh}$ *soit finie, est que la quantité* $O_x \equiv \lim_{h=0} O_{xh}$ *est finie, où*

$$(147)\qquad \begin{cases} O_{xh} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int\limits_{0}^{\varkappa} \frac{\bar{\sigma}\,\tau\,d\tau}{(\delta^2 + \tau^2)^{3/2}} \\ \bar{\sigma} = \sigma(h + h\tau, \vartheta) - \sigma(h - h\tau, \vartheta). \end{cases}$$

Cas particulier. Si la fonction σ est indépendante de r, on aura $O_x = 0$.

2°. N_{yh}. On peut écrire

$$N_{yh} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sin\vartheta\,d\vartheta \int\limits_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht, \vartheta)\,t^2 \frac{dt}{q^3} + N'_y, \ \lim_{h=0} N'_y \text{ finie},$$

$$\frac{t^2}{q^3} = \frac{(t-1)^2}{q^3} + \frac{2(t-1)}{q^3} + \frac{1}{q^3},$$

et nous trouverons comme dans le cas précédent, en posant

$$\sigma_2(r, \vartheta) = \sigma(r, \vartheta) - \sigma(r, 2\pi - \vartheta),$$

le résultat suivant:

Théorème: *La condition nécessaire et suffisante pour que la quantité* $\lim_{h=0} N_{yh}$ *soit finie, est que la quantité* $O_y \equiv \lim_{h=0} O_{yh}$ *est finie, où*

$$(148)\qquad \begin{cases} O_{yh} = \int\limits_{0}^{\varepsilon} \vartheta\,d\vartheta \int\limits_{0}^{\varkappa} \bar{\sigma}_1 \frac{d\tau}{(\delta^2 + \tau^2)^{3/2}} \\ \bar{\sigma}_2 = \sigma_2(h + h\tau, \vartheta) + \sigma_2(h - h\tau, \vartheta). \end{cases}$$

Cas particulier. Si $\sigma(r, \vartheta) = \sigma(r, 2\pi - \vartheta)$, on aura $O_y = 0$.

3°. N_{zh}. On a

$$N_{zh} = -\sin\psi \int\limits_{0}^{2\pi} d\vartheta \int\limits_{0}^{\frac{a}{h}} \sigma(ht, \vartheta) \frac{t\,dt}{q^3} = -\sin\psi \int\limits_{0}^{2\pi} \sigma_m\,d\vartheta \int\limits_{0}^{w} \frac{t\,dt}{q^3} - \sin\psi \int\limits_{0}^{2\pi} d\vartheta \int\limits_{w}^{\frac{a}{h}} \frac{\sigma\,t\,dt}{q^3}, \ w > 1,$$

σ_m étant une valeur moyenne de σ pour $0 \leq r \leq wh$, et de plus on aura

$$\lim_{h=0} \sin\psi \int\limits_{0}^{2\pi} d\vartheta \int\limits_{w}^{\infty} \frac{t\,dt}{q^3} = \lim_{h=0} \sin\psi \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int\limits_{w}^{\infty} \frac{t\,dt}{q^3} = \pi\left[1 - \frac{w-1}{\sqrt{w^2 - 2w\cos\vartheta' + 1}}\right] = E(w),$$

où ϑ' est une valeur moyenne de $\vartheta, -\varepsilon \leq \vartheta' \leq \varepsilon'$. Mais ε et ε' sont arbitraires, $\therefore$ ϑ' est si près de zéro qu'on voudra,

$$\therefore \vartheta' = 0, \therefore E(w) = 0 \text{ pour } w > 1,$$

$$\therefore N_{zh} = -\sin\psi \int_0^{2\pi} \sigma_m d\vartheta \int_0^{\infty} \frac{t\,dt}{q^3} + \iota_h, \lim \iota_h = 0.$$

Mais

$$\lim_{h=0} [\sigma_m - \sigma_0(\vartheta)] = 0,$$

$$\therefore N_{zh} = -\sin\psi_0 \int_0^{\varepsilon'} \frac{\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta}{1 - \cos\psi \cos\vartheta} - \sin\psi \int_0^{\varepsilon} \frac{\sigma_0(-\vartheta)\,d\vartheta}{1 - \cos\psi \cos\vartheta} + \iota'_h, \lim_{h=0} \iota'_h = 0,$$

$$\therefore \lim_{h=0} N_{zh} = -\pi(\sigma_+ + \sigma_-),$$

où σ_+ et σ_- sont deux valeurs moyennes de σ pour des valeurs infiniment petites positives, resp. négatives, de ϑ.

D'où le théorème:

Théorème. *$\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z}$ existe toujours et*

(149) $$\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z} = -\pi(\sigma_+ + \sigma_-).$$

Dans le cas général on peut écrire

(150) $$\begin{cases} \frac{\partial V_h}{\partial s} = U_{sh} + N_{sh} \\ U_{sh} = \lambda U_{xh} + \mu U_{yh} \\ N_{sh} = \lambda N_{xh} + \mu N_{yh} + \nu N_{zh} \\ O_{sh} = \lambda O_{xh} + \mu O_{yh} \\ U_s = \lim_{h=0} U_{sh},\ N_s = \lim_{h=0} N_{sh},\ O_s = \lim_{h=0} O_{sh}. \end{cases}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si U_s existe, donc la condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ existe, est que la quantité O_s existe.*

Remarque I. Dans les formules (147) et (148), on peut remplacer

(151) $$\delta^2 \text{ par } \vartheta^2 + \psi'^2.$$

En effet, on a

$$\sin^2\delta = \sin^2\vartheta + \sin^2\psi\cos^2\vartheta$$

$$\lim_{\psi=0}\int_0^{\varkappa}\left[\frac{1}{(\delta^2+\tau^2)^{3/2}} - \frac{1}{(\vartheta^2+\psi^2+\tau^2)^{3/2}}\right]d\tau = 0 \text{ etc.}$$

D'où il suit qu'on peut remplacer O_{xh} et O_{yh} par $\overline{O}_{xh}$ et $\overline{O}_{yh}$ resp., où

$$(152)\qquad \begin{cases} \overline{O}_{xh} = \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}[\sigma(h+h\tau',\vartheta) - \sigma(h-h\tau',\vartheta)]\frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2+\psi^2}} \\ \overline{O}_{yh} = \displaystyle\int_0^{\varkappa}[\sigma_1(h+h\tau,\vartheta') + \sigma_1(h-h\tau,\vartheta')]\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2+\psi^2}} \text{ etc.,} \end{cases}$$

τ' et ϑ' étant des valeurs moyennes de τ et de ϑ resp.

Remarque II. Posons dans l'expression de N_{xh}

$$\sigma = \sigma_0 + (\sigma - \sigma_0),$$

et nommons N^0_{xh} et N'_{xh} les parties correspondantes de N_{xh}. On trouvera $\lim\limits_{h=0} N'_{xh} = 0$ si O_x est $= 0$, et inversement. Par suite on aura le résultat suivant: *Si* $O_x = 0$, *donc*

$$(153)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial V_h}{\partial x} = \lim\limits_{h=0}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\, d\vartheta\int_h^a \sigma(r,\vartheta)\frac{dr}{r} + \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\frac{dG_{0x}(\vartheta)}{d\vartheta}d\vartheta \\ G_{0x} = -\sin\vartheta\left[1 + \log\dfrac{1-\cos\vartheta}{2}\right]. \end{cases}$$

En comparant les formules (153) aux formules (128) nous pourrons énoncer le théorème suivant en vertu de l'égalité (130).

Théorème. *Si* $O_x = 0$, $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial V_h}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial x}$, *c.-à-d. la limite de la dérivée prise dans la direction de la tangente est la même que la dérivée au point* P_0 *prise dans la même direction.*

Remarque III. Nommons O_y^0 et O_y' ce que deviendra O_y, lorsqu'on y remplace σ par σ_0 et $\sigma - \sigma_0$ resp. Nous trouverons

$$(154)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lim_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial y}=\lim_{h=0}\int_0^{2\pi}\sin\vartheta d\vartheta\int_h^a\sigma(r,\vartheta)\frac{dr}{r}+\lim_{h=0}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\frac{\partial G_y}{\partial\vartheta}d\vartheta\\ &G_y=\cos\vartheta\left[1+\log\frac{1-\cos\psi\cos\vartheta}{2}\right],\end{aligned}\right.$$

pourvu que la quantité O'_y soit nulle. Pour que la seconde intégrale soit finie, il faut que la quantité O^0_y soit finie ou, ce qui revient au même, que la quantité

$$(155)\qquad O^0_y=\lim_{h=0}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\frac{\sin\vartheta d\vartheta}{1-\cos\psi\cos\vartheta}$$

soit finie.

Cas particuliers. La quantité O^0_y est finie,

1° si $\frac{d\sigma_0(\vartheta)}{d\vartheta}$ existe,et $\sigma_0(\vartheta)$ est continue pour $-\varepsilon\leq\vartheta\leq\varepsilon'$;

2° si $\sigma_0(\vartheta)=\sigma_0+\sigma_1(\vartheta)$, où σ_0 est une constante, et l'intégrale

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sigma_1(\vartheta)\frac{d\vartheta}{\vartheta}$$

est finie, etc.

Remarque IV. Nous avons supposé que la courbe P_0PP_1 est contenue dans le plan des xz. Dans le cas général l'angle ω n'est pas $=0$, mais $\lim\limits_{h=0}\omega=0$; dans ce cas nous retrouverons les mêmes formules pour $\lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial s}$, pourvu que

$$(156)\qquad \lim_{h=0}\left[\sin\omega\frac{\partial V^0_h}{\partial x}\right]=\lim_{h=0}\left[\sin\omega\frac{\partial V^0_h}{\partial y}\right]=0,$$

où $\frac{\partial V^0_h}{\partial x}$ et $\frac{\partial V^0_h}{\partial y}$ sont les valeurs trouvées pour $\omega=0$, si l'on y remplace $\sigma(r,\vartheta)$ par $\sigma(r,\vartheta+\omega)$.

§ 24. $\frac{\partial V}{\partial s}$ *et* $\lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial s}$ *sur le bord du plan.*

Supposons que σ ait des valeurs constantes mais différentes σ_1 et σ_2 des deux côtés d'une ligne.

1°. *Ligne droite.* Pour la dérivée tangentielle dans la surface nous trouverons (126), ω étant l'angle que fait PP' avec la droite de séparation,

$$T_h=2(\sigma_1-\sigma_2)\sin\omega\log\frac{a}{h},$$

où l'on suppose que la droite PP' est dirigée vers l'intérieur du domaine de densité σ_1 et que $0 \leqq \omega \leqq \pi$. De plus on aura (128)

$$M = 2(\sigma_2 - \sigma_1)\sin\omega \log\frac{\sin\omega}{2},$$

(157) $\therefore \frac{\partial V}{\partial s} = 0$ pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, mais $= \infty$ pour toute autre valeur de ω.

De même la dérivée oblique (131) n'existe que pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$, auquel cas on trouvera

(158) $$\frac{\partial V}{\partial s} = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2)\sin\psi.$$

La dérivée normale existe toujours et s'obtient de la formule (158) pour $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Afin de calculer $\frac{\partial V_h}{\partial s}$, nous prenons la droite de séparation pour axe des x et dirigeons l'axe des y vers l'intérieur du domaine de densité σ_1. Les équations (141) donnent

(159) $$\begin{cases} \frac{\partial V_h}{\partial s} = \lambda\frac{\partial V_h}{\partial x} + \mu\frac{\partial V_h}{\partial y} + \nu\frac{\partial V_h}{\partial z} \\ \lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial x} = 0 \\ \lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial y} \quad \text{infinie} \\ \lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial z} = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2) - 2(\sigma_1 - \sigma_2)\,\mathrm{tg}^{-1}(\sin\omega_0\cot\psi_0). \end{cases}$$

Si la courbe P_0PP_1 touche le plan, on aura les mêmes formules (159) dans le cas où l'angle ω est constant. En y posant $\psi = 0$, on aura

(160) $$\begin{cases} \lim\frac{\partial V_h}{\partial z} = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2) & \text{pour } \omega = 0 \text{ ou } \omega = \pi \\ \qquad = -2\pi\sigma_1 & \text{pour } 0 < \omega < \pi \\ \qquad = -2\pi\sigma_2 & \text{pour } \pi < \omega < 2\pi. \end{cases}$$

Si l'angle ω n'est pas constant, on retrouvera les formules (159) et (160) pour le cas, où $\lim\limits_{h=0}\omega$ n'est pas $= 0$ ni $= \pi$. Si $\lim\limits_{h=0}\omega = 0$ on retrouvera les formules (159) pour $\lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial x}$ et $\lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial y}$, si

(161) $$\lim_{h=0}\sin\omega\log h = 0,$$

et on peut écrire, en supposant l'angle ω positif,

$$\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z} = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2) - 2(\sigma_1 - \sigma_2) \lim_{h=0} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{\psi}. \tag{162}$$

Le cas $\lim\limits_{h=0} \omega = \pi$ se réduit au cas précédent.

2°. *Courbe à tangente déterminée et unique.* On trouvera les mêmes résultats (159) pour $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial y}$ et $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z}$, et on aura

$$\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial x} = (\sigma_2 - \sigma_1) \lim_{h=0} \int_h^a (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2) \frac{dr}{r}, \tag{163}$$

l'axe des x étant dirigé suivant la tangente, et ϑ_1 et ϑ_2 étant les valeurs limites de ϑ. Pour un point régulier $\frac{\vartheta_1}{r}$ et $\frac{\pi - \vartheta_2}{r}$ ont des limites finies, $\therefore \lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial x}$ *existe en un point régulier*. Si la courbe P_0PP_1 touche le plan, on aura les mêmes résultats, et dans le cas où ω_0 est $\neq 0$ et $\neq \pi$, et dans le cas où l'angle ω est constant et $= 0$ ou $= \pi$. Cela aura même lieu dans le cas où l'angle ω est variable et $\lim\limits_{h=0} \omega = 0$ ou $= \pi$, pourvu que la projection de la courbe P_0PP_1 dans le plan ne tombe pas entre la tangente et la courbe de discontinuité.

Supposons maintenant $\omega < \vartheta_1$ pour $r > h$. La partie de N_{xh} qui pourrait devenir infinie peut s'écrire (138)

$$H_x = (\sigma_2 - \sigma_1) \int_0^{\bar{\vartheta}} d\vartheta \int_{t_1}^{w} (-\cos\psi \cos\omega + t \cos\vartheta) \frac{t\,dt}{q^3}, \quad w > 1,$$

$\bar{\vartheta} = \vartheta_1(w)$, $t_1 =$ la valeur de t en un point du bord. Posons $\vartheta - \omega = \vartheta'$,

$$\therefore\ H_h = -\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) \int_{-\omega}^{\bar{\vartheta}-\omega} \frac{(\cos\psi - \cos\vartheta')\cos\omega + \sin\omega \sin\vartheta'}{1 - u} d\vartheta' \Big|_{t_1}^{w} \frac{t-1}{q} + H', \ \lim_{h=0} H' = 0.$$

De plus on aura

$$\Big|_{t_1}^{w} \frac{t-1}{q} \quad 2$$

$$\frac{\cos\psi - \cos\vartheta'}{1-u} \qquad \frac{1}{\cos\psi} \qquad \frac{\sin^2\psi}{\cos\psi\,(1-u)}$$

$$\sin\omega \int_{-\omega}^{\bar{\vartheta}-\omega} \frac{\sin\vartheta' d\vartheta'}{1 - \cos\psi \cos\vartheta'} = \frac{\sin\omega}{\cos\psi} \log \frac{1 - \cos\psi \cos(\vartheta - \omega)}{1 - \cos\psi \cos\omega},$$

$\therefore \lim_{h=0} H_x$ est finie ou infinie, si $\lim_{h=0} \omega \log [\psi^2 + (\vartheta - \omega)^2]$ est finie ou infinie.

On retrouvera la formule (163) aussi dans ce cas, pourvu que

(164) $$\lim_{h=0} \omega \log [\psi^2 + (\vartheta - \omega)^2] = 0 .$$

Enfin on aura

$$\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial z} = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2) - 2(\sigma_2 - \sigma_1) \lim_{h=0} \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{\vartheta_1 - \omega}{\psi} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{\psi} \right].$$

Remarque. Soient Q_1 le point (w, ϑ) et $\delta =$ l'angle (P_0Q_1, P_0P), donc la condition (164) peut s'écrire

(164*) $$\lim_{h=0} \omega \log \delta = 0 .$$

3°. *Point saillant.* Supposons que les deux densités sont séparées par deux droites qui se rencontrent au point P_0, et soit $\pi - 2\lambda'$ leur angle, concave du côté où la densité est $= \sigma_1$, $0 < \lambda' < \frac{\pi}{2}$. Prenons la bissectrice de cet angle pour axe des y. Nous trouverons (141)

(165) $$\begin{cases} \lim_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial x} = (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \lambda' \log \dfrac{1 + \cos \psi_0 \cos (\lambda' + \omega_0)}{1 - \cos \psi_0 \cos (\lambda' - \omega_0)} \\ \lim_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial y} \text{ infinie} \\ \lim_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial z} = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2) + 2(\sigma_2 - \sigma_1) \operatorname{tg}^{-1} \dfrac{\sin \omega_0 \cos \psi_0 - \sin \lambda'}{\sin \psi_0 \cos \lambda'} . \end{cases}$$

Pour $\lim_{h=0} \psi = 0$ on aura des valeurs finies de $\lim \frac{\partial V_h}{\partial x}$, excepté les cas où $\omega_0 = \lambda'$ et $\omega_0 = \pi - \lambda'$, c.-à-d. les cas où les lignes de séparation sont tangentes à la courbe P_0PP_1. Enfin on aura

(166) $$\begin{cases} \lim \dfrac{\partial V_h}{\partial z} = -2\pi\sigma_1 \text{ dans le domaine } \sigma_1 \\ \qquad = -2\pi\sigma_2 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \sigma_2 \\ \qquad = -\pi(\sigma_1 + \sigma_2) \text{ suivant les lignes de séparation,} \end{cases}$$

l'angle ω étant supposé constant.

On trouvera facilement comment on peut généraliser ces résultats au cas que le point P_0 se trouve sur le bord en un point saillant d'une courbe quelconque.

4°. *Point de rebroussement.* Prenons la tangente commune des deux branches pour axe des y et soit-elle dirigée vers l'intérieur du domaine σ_1. La formule

(163) donne,

(167)
$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial x}=(\sigma_2-\sigma_1)\lim_{h=0}\int_h^a(\cos\varepsilon_1-\cos\varepsilon_2)\frac{dr}{r}, \text{ pour}\\ &\vartheta_1=\frac{\pi}{2}-\varepsilon_1,\ \vartheta_2=\frac{\pi}{2}+\varepsilon_2,\ \therefore \lim_{h=0}\varepsilon_1=\lim_{h=0}\varepsilon_2=0. \end{aligned}\right.$$

De plus, les formules (141) donnent

(168)
$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial y}=(\sigma_1-\sigma_2)\int_h^a(\sin\varepsilon_1+\sin\varepsilon_2)\frac{dr}{r}, \text{ et}\\ &\lim_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial z}=-2\pi\sigma_2. \end{aligned}\right.$$

$\therefore \lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial V_h}{\partial y}$ n'est pas nécessairement infinie dans ce cas.

Si la courbe P_0PP_1 touche le plan, mais si ω est $\neq\frac{\pi}{2}$, les quantités $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial V_h}{\partial x}$ et $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial V_h}{\partial y}$ existent, si elles existent pour $\psi_0\neq 0$. Dans le cas où $\omega=\frac{\pi}{2}$, on aura $\nu=\cos\psi\sin\vartheta$, et on trouvera que la partie de N_h (138) qui pourrait devenir infinie peut s'écrire

$$I=(\sigma_1-\sigma_2)\int_0^{w}t\,dt\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}[-\mu\cos\psi+(\lambda\cos\vartheta+\mu\sin\vartheta)t]\frac{d\vartheta}{q^3}=\lambda I_x+\mu I_y.$$

1°. $\operatorname{Lim}\limits_{h=0}\dfrac{\partial V_h}{\partial x}$. On aura

$$I_x=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\cos\psi}\int_0^{w}\left(\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_1}\right)t\,dt,$$

q_1 et q_2 étant les valeurs que prend q pour $\vartheta=\vartheta_1$ et $\vartheta=\vartheta_2$ resp. Soit q_0 la valeur de q pour $\vartheta=\frac{\pi}{2}$,

$$\therefore\ q_0=\sqrt{t^2-2t\cos\psi+1}<q_1=\sqrt{t^2-2t\cos\psi\cos\varepsilon_1+1}<\sqrt{t^2-2t\cos\psi\cos\bar\varepsilon+1}=\bar q_1,$$

$\bar\varepsilon$ étant la valeur maximum de ε_1 pour $r\leq wh$,

$$\therefore\ I_x=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\cos\psi}\int_0^{u}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_1}\right)t\,dt-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\cos\psi}\int_0^{w}\left(\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_2}\right)t\,dt=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\cos\psi}[t'I'-t''I'']$$

$$I' \equiv \int_0^{w} \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}\right) dt, \qquad I'' \equiv \int_0^{w} \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_2}\right) dt,$$

t' et t'' étant des valeurs moyennes de t. On aura

$$I' < \int_0^{w} \left(\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}\right) dt = \Big|^{t=w} \log \frac{q_0 + t - \cos\psi}{q + t - \cos\psi\cos\varepsilon} - \log \frac{1 - \cos\psi}{1 - \cos\psi\cos\varepsilon}.$$

Le premier terme du dernier membre a une limite finie pour $\lim h = 0$, et le second terme aura une limite finie, si

(169) $$\lim_{h=0} \frac{\varepsilon}{\psi} \text{ est finie.}$$

On peut traiter l'intégrale I'' de la même manière.

2°. $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial y}$. On peut écrire

$$I_y = (\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^{w} t\,dt \int_0^{\varepsilon_1} (t\cos\varepsilon - \cos\psi) \frac{d\varepsilon}{q^3} + (\sigma_1 - \sigma_2) \int_0^{w} t\,dt \int_0^{\varepsilon_2} (t\cos\varepsilon - \cos\psi) \frac{d\varepsilon}{q^3}.$$

Or on a

$$\int_0^{\varepsilon_1} (t\cos\varepsilon - \cos\psi) \frac{d\varepsilon}{q^3} = -\frac{1}{2\cos\psi} \int_0^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{q} + A \frac{\sin\varepsilon_1}{q_1} + \frac{A}{4t\cos\psi} \int_0^{\varepsilon_1} q\,d\varepsilon$$

$$A \equiv \frac{2t}{(t^2 + 2t\cos\psi + 1)} \left[1 + \frac{2(t - \cos\psi)\cos\psi}{t^2 - 2t\cos\psi + 1}\right].$$

Par suite, le premier terme de l'expression de I_y a une valeur limite finie, si les deux quantités

$$I'_y \equiv \int_0^{w} dt \int_0^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{q} \quad \text{et} \quad I''_y \equiv \int_0^{w} \sin\varepsilon_1 \frac{|t - \cos\psi|\, t\,dt}{q_1 q_0^2}$$

ont des limites finies. On a

$$I'_y < \varepsilon \int_0^{w} \frac{dt}{q_0}, \quad \therefore \lim_{h=0} I'_y \text{ est finie, si } \lim_{h=0} \varepsilon \log\psi \text{ est finie,}$$

$$I''_y < \varepsilon w \int_0^w \frac{dt}{q_0}, \quad \therefore \lim_{h=0} I''_y \text{ est finie, si } \lim_{h=0} \frac{\varepsilon}{\psi} \text{ est finie.}$$

Le second terme de l'expression de I_y peut être traité de la même manière.

3°. $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial z}$ existe toujours.

En résumé nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si le point P_0 se trouve en un point de rebroussement du bord, $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s}$ existe toujours où la courbe $P_0 P P_1$ n'a pas un contact avec la tangente qui est d'un ordre plus élevé que ceux qu'ont les branches du bord avec la même tangente.*

§ 25. **Cas particuliers.** Les considérations précédentes ont conduit à ce résultat que l'existence des dérivées dans la surface et des limites des dérivées extérieures dépend en général de l'existence des quantités

(170)
$$\begin{cases} U_x = \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos \vartheta \, d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} = \lim\limits_{h=0} \int_{(h)}^{(a)} \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\omega \\ U_y = \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} = \lim\limits_{h=0} \int_{(h)}^{(a)} \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\omega, \end{cases}$$

où $d\omega$ est l'élément de surface, et où le signe $\int\limits_{(h)}^{(a)}$ désigne que l'intégration doit être prise sur le domaine qui est compris entre les deux cercles, dont les rayons sont a et h resp., et dont le centre commun se trouve au point P_0 de la surface. Nous examinerons dans ce paragraphe quelques cas particuliers, où ces limites existent.

1°. Soit $\sigma(r, \vartheta)$ une telle fonction de ϑ que

$$\int_0^{2\pi} \sigma \cos \vartheta \, d\vartheta = 0, \quad \therefore \int_0^a \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} \sigma \cos \vartheta \, d\vartheta = 0, \quad \therefore U_x \text{ existe,}$$

ou que

$$\int_0^{2\pi} \sigma \sin \vartheta \, d\vartheta = 0, \quad \therefore U_y \text{ existe.}$$

Ce cas a lieu par ex. si σ est α) une constante ou β) une fonction de r seulement. γ) Si $\sigma(2\pi-\vartheta)=\sigma(\vartheta)$, U_y existe; et si $\sigma(\pi-\vartheta)=\sigma(\vartheta)$, U_x existe. δ) Si σ est une fonction de x seulement, U_y existe, et si σ est une fonction de y seulement U_x existe. ε) Soit σ une fonction de $r\cos\vartheta$ seulement. On aura, en posant $r\cos\vartheta=x$,

$$U_{xh}=\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta\int_h^a\sigma(\bar{x})\frac{dr}{r}=\iint\sigma(\bar{x})\cos\vartheta\frac{dx\,d\vartheta}{x}=$$

$$=2\int_{-h}^{h}\sigma(\bar{x})\left(\sqrt{1-\frac{\bar{x}^2}{a^2}}-\sqrt{1-\frac{x^2}{h^2}}\right)\frac{d\bar{x}}{\bar{x}}+2\int_h^a\frac{\sigma(\bar{x})-\sigma(-\bar{x})}{\bar{x}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

La première intégrale du dernier membre a une valeur limite finie pour $\lim h=0$. La seconde intégrale a une limite finie, si $\lim\limits_{h=0}\int_h^a\frac{\sigma(x)-\sigma(-x)}{x}dx$ est finie. D'où le théorème:

Théorème. *Si σ est une fonction de x seulement, donc U_x existe, si*

(171) $$\lim_{h=0}\int_h^a\frac{u(x)-u(-x)}{x}d\bar{x}\ \textit{est finie.}$$

ζ) Si $\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}$ existe pour tout point dans le cercle (a), donc U_x existe. En effet, on aura

$$\int_{(h)}^{(a)}\sigma(\xi,\eta)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\omega=-\int_{(h)}^{(a)}\sigma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\xi\,d\eta=-\int_0^{2\pi}[\sigma(a,\vartheta)-\sigma(h,\vartheta)]\cos\vartheta\,d\vartheta+\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_h^a\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}dr\ \text{etc.}$$

η) U_x et U_y existent, si

(172) $$\left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0\cos\vartheta\,d\vartheta=0,\ \int_0^{2\pi}\sigma_0\sin\vartheta\,d\vartheta=0,\ \text{et}\\ \displaystyle\lim_{h=0}\int_h^a\frac{\sigma-\sigma_0}{r}dr\ \text{est finie et déterminée pour chaque valeur de }\vartheta.\end{array}\right.$$

§ 26. *Existence de la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *en un point quelconque du plan attirant.*

L'existence de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ en un point situé dans le plan ou de la limite de la dérivée extérieure dépend essentiellement de l'existence de la quantité $U_s = \lim_{h=0} U_{sh}$, où

(173) $$U_{sh} = \lambda\, U_{xh} + \mu\, U_{yh},$$

le point considéré P_0 étant pris pour origine et comme centre de la partie circulaire considérée du plan. Nous chercherons maintenant une formule, où la condition de l'existence de U_s soit exprimée en fonction des coordonnées du point P, situé sur l'axe des x positifs à la distance k de l'origine P_0, $k > 0$. Nous aurons pour le point P (fig. 1), en prenant l'axe des x dans la direction $P_0 P$,

(174) $$\left\{\begin{aligned} & U_{sh} = \int \sigma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial s} d\omega = \int_{(h)}^{(a)} \sigma v \frac{r\,dr\,d\vartheta}{R^2} \\ & v = \cos(ds, PQ) = \lambda \frac{r\cos\vartheta - k}{R} + \mu \frac{r\sin\vartheta}{R} \\ & R = PQ = \sqrt{r^2 - 2rk\cos\vartheta + k^2} \\ & k = P_0 P, \end{aligned}\right.$$

l'intégrale étant prise sur le domaine qui est compris entre le cercle (P_0) et un cercle de rayon $h\,(h < k)$, dont le centre se trouve au point P. Posons (62)

(175) $$\left\{\begin{aligned} & r = ks,\ h = k\alpha,\ R = kp,\ \cos\vartheta = u, \\ & \therefore\ p = \sqrt{s^2 - 2su + 1} \\ & v = \frac{\lambda(su - 1)}{p} + \mu \frac{s}{p}\sin\vartheta = \frac{\beta_2 s - \lambda}{p},\ \beta_2 \equiv \lambda\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta. \end{aligned}\right.$$

Soit $\varkappa$ une constante telle que $1 > \varkappa > \alpha$,

(176) $$\left\{\begin{aligned} & \therefore\ U_{sh} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{1-\varkappa} \sigma(ks, \vartheta)\, v \frac{s\,ds}{p^2} + \int_0^{2\pi} \partial\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \sigma \frac{vs\,ds}{p^2} + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1-\alpha} \sigma \frac{vs\,ds}{p^2} + \\ & \quad + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\alpha}^{1+\varkappa} \sigma \frac{vs\,ds}{p^2} + \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} s\,ds \int_{\vartheta_1}^{2\pi-\vartheta_1} \sigma v \frac{d\vartheta}{p^2} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \\ & \qquad \alpha^2 = s^2 - 2s\cos\vartheta_1 + 1. \end{aligned}\right.$$

Les intégrales I_1 et I_2 sont indépendantes de α, et comme p ne peut s'évanouir que pour $s=u=\text{1}$, elles sont aussi toujours finies. Quant à I_5 on aura

$$\int_{1-\alpha}^{1+\alpha} s^2 ds \int_{\vartheta_1}^{2\pi-\vartheta_1} \sigma \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{p^3} = \sigma' \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} s\,ds \int_{\vartheta=\vartheta_1}^{\pi} d\left(-\frac{1}{p}\right) + \sigma'' \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} s\,ds \int_{\vartheta=\pi}^{2\pi-\vartheta_1} d\left(-\frac{1}{p}\right) = 2(\sigma'-\sigma'') + (\sigma''-\sigma') \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \frac{s\,ds}{s+1},$$

σ' et σ'' étant deux valeurs moyennes de σ. Si la fonction σ est continue, la limite pour $\alpha=0$ du dernier membre est $=0$. D'autre part on peut écrire (cfr fig. 3)

$$\int_{1-\alpha}^{1+\alpha} s\,ds \int_{\vartheta_1}^{2\pi-\vartheta_1} \sigma(su-1)\frac{d\vartheta}{p^3} = \int_{\vartheta_2}^{2\pi-\vartheta_2} d\vartheta \int_{1-\alpha}^{1+\alpha} \sigma(su-1)\frac{s\,ds}{p^3} + \int_{-\vartheta_2}^{\vartheta_2} d\vartheta \int_{1-\alpha}^{s_1} \sigma(su-1)\frac{s\,ds}{p^3} +$$

$$+ \int_{-\vartheta_2}^{\vartheta_2} d\vartheta \int_{s_2}^{1+\alpha} \sigma(su-1)\frac{s\,ds}{p^3} \equiv F' + F'' + F''',$$

$$\sin\vartheta_2 = \alpha,\ s_1 = \cos\vartheta - \sqrt{\alpha^2 - \sin^2\vartheta},\ s_2 = \cos\vartheta + \sqrt{\alpha^2 - \sin^2\vartheta}$$

$$F' = \sigma' s' \int_{\vartheta_3}^{2\pi-\vartheta_3} d\vartheta \Big/_{1-\alpha}^{1+\alpha} -\frac{s}{p} + \sigma' s' \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} d\vartheta \Big/_{1-\alpha}^{\frac{1}{\cos\vartheta}} -\frac{s}{p} + \sigma'' s'' \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} d\vartheta \Big/_{\frac{1}{\cos\vartheta}}^{1+\alpha} -\frac{s}{p} +$$

$$+ \sigma' s' \int_{-\vartheta_3}^{-\vartheta_2} d\vartheta \Big/_{1-\alpha}^{\frac{1}{\cos\vartheta}} -\frac{s}{p} + \sigma'' s'' \int_{-\vartheta_3}^{-\vartheta_2} d\vartheta \Big/_{\frac{1}{\cos\vartheta}}^{1+\alpha} -\frac{s}{p},\ \cos\vartheta_3 = \frac{1}{1+\alpha},$$

σ', σ'', s' et s'' étant des valeurs moyennes de σ et de s. Posons

$$p_1 = \sqrt{2(1-u)(1-\alpha)+\alpha^2},\ p_2 = \sqrt{2(1-u)(1+\alpha)+\alpha^2},\ \Gamma = \int_{0}^{\varepsilon} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}\right) d\vartheta.$$

Nous avons trouvé (74) $\lim\limits_{\alpha=0} \Gamma \leqq e\varepsilon$, $\lim\limits_{\varepsilon=0} e$ finie,

$$\therefore \lim_{\alpha=0} \int_{\vartheta_3}^{2\pi-\vartheta_3} d\vartheta \Big/_{1-\alpha}^{1+\alpha} -\frac{s}{p} = 0.$$

Posons de plus

$$2(1-\alpha)=\vartheta^2\lambda(\vartheta),\ \therefore\ p_1=\sqrt{\lambda(\vartheta)(1-\alpha)}\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta)}}.$$

$$\therefore\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left(\frac{1-\alpha}{p_1}-\frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\right)d\vartheta=-\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left[\frac{1}{\vartheta}-\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta)}}}\right]d\vartheta+g,\ \lim_{\alpha=0}g=0,$$

$$\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left[\frac{1}{\vartheta}-\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta_3)}}}\right]d\vartheta>\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left[\frac{1}{\vartheta}-\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta)}}}\right]d\vartheta>$$

$$\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left[\frac{1}{\vartheta}-\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}}\right]d\vartheta.$$

En effectuant les intégrations, on trouvera

$$\lim_{\alpha=0}\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left(\frac{1-\alpha}{p_1}-\frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\right)d\vartheta=-\lim_{\alpha=0}\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_3}\left[\frac{1}{\vartheta}-\frac{1}{\sqrt{\vartheta^2+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)\lambda(\vartheta)}}}\right]d\vartheta=-\log\tfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1).$$

Les autres termes de F' peuvent être traités de la même manière, et on trouvera

$$\lim_{\alpha=0}F'=0.$$

De même on peut écrire

$$F''=-\sigma's'\int_{-\vartheta_2}^{\vartheta_2}\left(\frac{s_1}{\alpha}-\frac{1-\alpha}{p_1}\right)d\vartheta=-\sigma's'\int_{-\vartheta_2}^{\vartheta_2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1}\right)d\vartheta+g',\ \lim_{\alpha=0}g'=0,$$

$$\therefore\ \lim_{\alpha=0}F''=-2\sigma_k[1-\log(\sqrt{2}+1)],$$

σ_k étant la valeur de σ au point P. Enfin on aura

$$F'''=2\sigma's'\int_{\vartheta_4}^{\vartheta_2}d\vartheta\Big|_{s_2}^{\frac{1}{\cos\vartheta}}-\frac{s}{p}+2\sigma''s''\int_{\vartheta_4}^{\vartheta_2}d\vartheta\Big|_{\frac{1}{\cos\vartheta}}^{1+\alpha}-\frac{s}{p}+2\sigma''s''\int_{0}^{\vartheta_4}d\vartheta\Big|_{s_3}^{1+\alpha}-\frac{s}{p},\ \operatorname{tg}\vartheta_4=\alpha,$$

et on trouvera que les deux premiers termes du second membre ont des limites nulles,

$$\therefore \lim_{\alpha=0} F'''' = 2\sigma_k[1 - \log(\sqrt{2} + 1)],$$

(177) $$\because \lim_{\alpha=0} S_5 = 0.$$

L'intégrale I_3 peut s'écrire

$$I_3 = \lambda F_3 + \mu G_3$$

$$F_3 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1-\pi}^{1-\alpha} \sigma(su - 1) s \frac{ds}{p^3}.$$

On peut écrire

(178) $$\frac{s(su-1)}{p^3} = (s+1)\frac{\partial}{\partial s}\frac{1-s}{p} + \frac{1}{1+u}\frac{\partial}{\partial s}\frac{s-u}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1-s}{p^3}, \quad \frac{\partial}{\partial s}\frac{1-s}{p} < 0.$$

Si on fait l'intégration de F_3 en y substituant l'expression (178) de $\frac{s(su-1)}{p^3}$, on peut intégrer chacun des trois premiers termes du second membre pour des valeurs moyennes de σ. En posant dans le dernier terme

$$s = 1 - \tau, \quad p_- = \sqrt{2(1-u)(1-\tau) + \tau^2},$$

on aura

$$F_3 = -\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_\alpha^\alpha \sigma(k - k\tau, \vartheta)\, \tau \frac{d\tau}{p_-^3} + f_3, \quad \lim_{\alpha=0} f_3 \text{ finie.}$$

On trouvera de même, en posant $s = 1 + \tau$,

$$I_4 = \lambda F_4 + \mu G_4$$

$$F_4 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_\alpha^\alpha \sigma(k + k\tau, \vartheta)\, \tau \frac{d\tau}{p_+^3} + f_4, \quad \lim_{\alpha=0} f_4 \text{ finie,}$$

$$p_+ = \sqrt{2(1-u)(1+\tau) + \tau^2},$$

(179) $$\therefore F_3 + F_4 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_\alpha^\alpha \left[\frac{\sigma(k+k\tau, \vartheta)}{p_+^3} - \frac{\sigma(k-k\tau, \vartheta)}{p_-^3}\right] \tau\, d\tau + f, \lim_{\alpha=0} f \text{ finie.}$$

Posons

$$p' = \sqrt{2(1-u) + \tau^2}, \quad \therefore p' > p_-.$$

Nous trouverons en intégrant

$$\lim_{\alpha=0} \int_{\alpha}^{\zeta} \left(\frac{1}{p_-^3} - \frac{1}{p'^3}\right) \tau \, d\tau = \text{une quantité toujours finie, même pour } \vartheta = 0,$$

et nous aurons un résultat analogue pour p_+. Dans l'équation (179) on pourra donc remplacer p_- et p_+ par p'. De même on peut remplacer p' par $p = \sqrt{\vartheta^2 + \tau^2}$. D'où le théorème.

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial x}$ *ou la limite* $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial x}$ *existe au point* P $(r = k > 0,\ \vartheta = 0)$, *est que la quantité* $H_x \equiv \lim_{\alpha=0} H_{x\alpha}$ *existe, où*

$$(180) \qquad H_{x\alpha} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\vartheta \int_{\alpha}^{\zeta} [\sigma(k + k\tau, \vartheta) - \sigma(k - k\tau, \vartheta)] \frac{\tau \, d\tau}{(\tau^2 + \vartheta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

pourvu que la courbe PP_1 *ne touche pas la surface.*

Si l'on pose

$$(181) \qquad \begin{cases} \sigma_1(r, \vartheta) = \sigma(r, \vartheta) + \sigma(r, 2\pi - \vartheta) \\ \tau = p\cos\gamma \qquad\qquad \vartheta = p\sin\gamma \\ \sigma_1(k + k\tau, \vartheta) = \sigma_+ \qquad \sigma_1(k - k\tau, \vartheta) = \sigma_-, \end{cases}$$

on peut mettre la quantité $H_{x\alpha}$ sous la forme

$$(182) \qquad \begin{cases} H_{x\alpha} = \displaystyle\int_0^{\cos^{-1}\frac{\alpha}{\zeta}} \cos\gamma \, d\gamma \int_{\frac{\alpha}{\cos\gamma}}^{\zeta} (\sigma_+ - \sigma_-) \frac{dp}{p} + h' = \int_{\alpha}^{\zeta} \frac{dp}{p} \int_0^{\cos^{-1}\frac{\alpha}{p}} (\sigma_+ - \sigma_-) \cos\gamma \, d\gamma + h', \ \lim_{\alpha=0} h' \text{ finie}, \\ \sigma_+ = \sigma_1(k + k\tau, \vartheta), \ \sigma_- = \sigma_1(k - k\tau, \vartheta). \end{cases}$$

Posons

$$(183) \qquad \sigma_+ - \sigma_- = \sigma_1(\tau, \vartheta) = \sigma_1(p, \gamma),$$

donc la quantité $H_{x\alpha}$ peut être remplacée par une des fonctions

$$
(184)\qquad \left|\begin{array}{l}
\int\limits_0^{\varepsilon} \bar{\sigma}_1(r', \vartheta)\frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2+\alpha^2}} \\[2ex]
\int\limits_{\alpha}^{\varkappa} \bar{\sigma}_1(\tau, \vartheta')\frac{d\tau}{\tau} \\[2ex]
\int\limits_0^{\cos^{-1}\frac{\alpha}{\varkappa}} \bar{\bar{\sigma}}_1(p', \gamma)\cos\gamma\log\frac{\cos\gamma}{\alpha}\, d\gamma, \\[2ex]
\int\limits_{\alpha}^{\varkappa} \bar{\sigma}_1(p, \gamma')\frac{dp}{p}
\end{array}\right.
$$

r', ϑ', p' et γ' étant des valeurs moyennes des variables τ, ϑ, γ et p resp.

Cas particulier. Si $\sigma_1(k+k\tau, \vartheta)$ est une fonction paire de τ, la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ existe.

Si nous posons

$$(185)\qquad \sigma_2(r, \vartheta) = \sigma(r, \vartheta) - \sigma(r, 2\pi - \vartheta),$$

nous trouverons de la même manière

$$(186)\quad G_3 + G_4 = \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_{\alpha}^{\varkappa}\left[\frac{\sigma_2(k+k\tau, \vartheta)}{p_+^3} + \frac{\sigma_2(k-k\tau, \vartheta)}{p_-^3}\right] d\tau + g,\ \lim_{\alpha=0} g \text{ finie},$$

et nous aurons le théorème suivant:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial y}$ *ou la limite* $\lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial y}$ *existe au point* $P(r=k,\ \vartheta=0)$, *est que la quantité* $H_y \equiv \lim\limits_{\alpha=0} H_{y\alpha}$ *existe, où*

$$(187)\qquad H_{y\alpha} = \int\limits_0^{\varepsilon}\vartheta\, d\vartheta \int\limits_{\alpha}^{\varkappa}[\sigma_2(k+k\tau, \vartheta) + \sigma_2(k-k\tau, \vartheta)]\frac{d\tau}{[\tau^2+\vartheta^2]^{\frac{3}{2}}},$$

pourvu que la courbe $P_0 P P_1$ *ne touche pas la surface.*

Posons

(188) $$\cos\gamma = \bar{v},\ \sigma_2(k + k\,r, \vartheta) + \sigma_2(k - k\,r, \vartheta) = \bar{\sigma}_2(r, \vartheta) = \bar{\sigma}_2(p, v),$$

donc la quantité $H_{y\alpha}$ peut être remplacée par une des fonctions

(189) $$\begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^1 dv \int_\alpha^{\frac{\varkappa}{v}} \bar{\bar{\sigma}}_2 \frac{dp}{p} \text{ et} \\ \displaystyle\int_\alpha^{\varkappa} \frac{dp}{p} \int_{\frac{\alpha}{p}}^1 \bar{\bar{\sigma}}_2\, dv \end{cases}$$

ou encore par une des fonctions

(190) $$\begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^{\varepsilon} \sigma_2(\iota'', \vartheta)\frac{d\vartheta}{\vartheta} \\ \displaystyle\int_\alpha^{\varepsilon} \sigma_2(\iota, \vartheta'')\frac{d\iota}{\iota} \\ \displaystyle\int_\alpha^{1} \sigma_2(p'', r)\log\frac{r}{\alpha}\,dr, \\ \displaystyle\int_\alpha^{\varkappa} \bar{\bar{\sigma}}_2(p, \bar{v}'')\frac{dp}{p} \end{cases}$$

ι'', ϑ'', p'' et v'' étant des valeurs moyennes des variables r, ϑ, p et v resp.

Cas particulier. Si $\sigma(r, \vartheta)$ est une fonction paire de ϑ, la dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$ existe.

Corollaires. 1°. Soit

$\iota = 0$ pour $1 - \alpha < s < 1 + \alpha$, et $= 1$ pour les autres valeurs de s.

Donc l'égalité (186) peut s'écrire (176)

$$G_3 + G_4 = \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \iota\,\sigma_2(ks, \vartheta)\frac{s^2\,ds}{p^3} = \int_0^\pi \sigma_2(ks', \vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \iota\, s^2 \frac{ds}{p^3},$$

s' étant une valeur moyenne de s. En substituant la valeur de ι et en intégrant par rapport à s, on trouvera que la quantité $H_{y\alpha}$ peut être remplacée aussi par la quantité

$$(191)\qquad \begin{cases} \int_0^{\varepsilon} \sigma_2(ks', \vartheta)\left[1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\vartheta^2}}\right]\frac{d\vartheta}{\vartheta}, \text{ ou encore} \\ \eta \int_0^{\varepsilon} \sigma_2(ks', \vartheta)\frac{\vartheta\, d\vartheta}{\alpha^2+\vartheta^2},\ 1 < \eta \leq 2\,. \end{cases}$$

2° **Théorème.** *La condition nécessaire et suffisante pour que* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *existe, est que* $H_s = \lim_{\alpha=0} H_{s\alpha}$ *existe, où*

$$(192)\qquad H_{s\alpha} = \lambda H_{x\alpha} + \mu H_{y\alpha}\,.$$

§ 27. *Continuité de la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *et de* $\lim_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial s}$. Dans ce paragraphe nous supposerons que la densité $\sigma(r, \vartheta)$ est continue par rapport à r et à ϑ. D'où il suit que les quantités $\frac{\partial V}{\partial s}$ et $\lim_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial s}$ — si la courbe PP_1 ne touche pas le plan, ce que nous supposerons dans ce paragraphe — sont continues en même temps que la quantité U_s, $k > 0$. Mais U_s est continue en même temps que $\lim_{\alpha=0}(I_3 + I_4)$, et nous trouverons que cette dernière quantité est continue en même temps que H_s, d'où le théorème:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *ou* $\lim_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial s}$ *soit continue au point* $P(r = k > 0,\ \vartheta = 0)$ *pour un déplacement suivant l'axe des* x, *est que la quantité* $H_s = \lim_{\alpha=0} H_{s\alpha}$ (192) *est continue par rapport à* k.

Quant à l'origine, nous trouverons pour $\sigma = \sigma_0$ (176 et 175)

$$I_1^0 + I_3^0 + I_4^0 = \sigma_0 \int_0^{2\pi} [A(1-\alpha) - A(0) + A(1+\alpha) - A(1+\alpha)]\, d\vartheta$$

$$A(s) = \int (\beta_2 s - \lambda)\, s \frac{ds}{p^3} = \lambda\left[u \log(p + s - u) + \frac{1 - 2su}{p}\right] + \mu \sin\vartheta \int s^2 \frac{ds}{p^3}.$$

En intégrant le terme logarithmique par partie, on trouvera

$$(193)\qquad \int_0^{2\pi} A(s)\,d\vartheta = -\lambda s\int_0^{2\pi} u\frac{d\vartheta}{p},$$

$$\therefore\ I_1^0 + I_3^0 + I_4^0 = -\lambda\sigma_0\int_0^{2\pi}\left[\frac{1-\alpha}{p_1} - \frac{1+\alpha}{p_2} + \frac{1+\varkappa}{p_\varkappa}\right]u\,d\vartheta$$

$$p_\varkappa = \sqrt{2(1-u)(1+\varkappa)+\varkappa^2}.$$

De plus, on aura

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\vartheta\int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \sigma(\beta_2 s - \lambda)s\frac{ds}{p^3} = \int_0^{2\pi} d\vartheta\int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \sigma\left(\frac{\beta_2 s^2}{p^3} - \frac{\beta_2}{s} - \frac{\lambda s}{p^3}\right)ds + \int_0^{2\pi}\beta_2\,d\vartheta\int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}}\sigma\frac{ds}{s} = I'_2 + I''_2$$

$$I'_2 = \sigma_0\int_0^{2\pi} d\vartheta\int_{1+\varkappa}^{\infty}\left(\frac{\beta_2 s^2}{p^3} - \frac{\beta_2}{s} - \frac{\lambda s}{p^3}\right)ds + j \equiv I_2^0 + j,\ \lim_{k=0} j = 0$$

$$I_2^0 = \sigma_0\lambda(1+\varkappa)\int_0^{2\pi} u\frac{d\vartheta}{p_\varkappa},$$

$$\therefore\ I_1^0 + I_2^0 + I_3^0 + I_4^0 = -\lambda\sigma_0\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\alpha}{p_1} - \frac{1+\alpha}{p_2}\right)u\,d\vartheta,$$

et nous trouverons que la limite pour $\alpha = 0$ du second membre est $= 0$,

$$\therefore\ \lim_{\varkappa=0}(I_1^0 + I_2^0 + I_3^0 + I_4^0 + I_5^0) = 0,$$

parce que $\lim\limits_{\varkappa=0} I_5 = 0$. Mais on a

$$\lim_{k=0}\lim_{\varkappa=0}(I_1 + I'_2 + I_5) = \lim_{\varkappa=0}(I_1^0 + I_2^0 + I_5^0),$$

et on trouvera que la quantité

$$\lim_{\varkappa=0}(I_3 + I_4 - H_s\alpha)$$

est continue par rapport à k. Enfin on aura

$$I''_2 = \int_0^{2\pi}\beta_2\,d\vartheta\int_k^a \sigma(r,\vartheta)\frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi}\beta_2\,d\vartheta\int_1^{1+\varkappa}\sigma\frac{ds}{s}.$$

où le second terme du second membre a une limite nulle pour $\lim k = 0$, si le

premier terme du même membre a une limite finie. Cette dernière limite est égale à la valeur T de U_s dans l'origine,

$$\therefore \lim_{k=0} U_s = \lim_{k=0} \lim_{\alpha=0} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) = \lim_{\alpha=0} (I_1^\circ + I_2^\circ + I_5^\circ) + T + \\ + \lim_{k=0} \lim_{\alpha=0} (I_3 + I_4 - H_{s\alpha}) + \lim_{k=0} H_s .$$

Si $\lim_{k=0} H_s = \lim_{\alpha=0} H_{s\alpha}^\circ$, $H_{s\alpha}^\circ$ étant ce que deviendra $H_{s\alpha}$, si l'on y remplace σ par σ_0, donc on trouvera que $\lim_{k=0} \lim_{\alpha=0} (I_3 + I_4 - H_{s\alpha}) + \lim_{k=0} H_s = \lim_{\alpha=0} (I_3^\circ + I_4^\circ)$. D'où le théorème:

Théorème. *Si U_s existe dans l'origine, donc la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ et $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ sont continues dans l'origine, si*

$$\lim_{k=0} H_s = H_s^\circ . \tag{194}$$

Remarque. La quantité $\lim_{k=0} H_s$ est identique à ce que deviendra la quantité O_s (150) pour $\psi = 0$. Par suite la condition, $\lim_{k=0} H_x = 0$, pour que la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ soit continue au point P_0 dans la direction de l'axe des x, est identique à la condition $O_x = 0$ (p. 202) pour que $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial x}$ soit égale à $\frac{\partial V}{\partial x}$ au point P_0.

Application. *Variation de la dérivée au bord de la surface.* Soient σ_1 et σ_2 deux densités constantes des deux côtés d'une droite. Nous avons vu que la dérivée dans la surface n'est finie que dans la direction de la droite et qu'elle y est $= 0$. En un point situé dans le domaine σ_1 à la distance k de la droite, on trouvera que la valeur de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$ — prise parallèlement à la droite par rapport à un cercle de rayon a dont le centre se trouve en ce point — est (128)

$$\frac{\partial V}{\partial y} = T = (\sigma_2 - \sigma_1) \int_{-\cos^{-1}\frac{k}{a}}^{\cos^{-1}\frac{k}{a}} \sin \vartheta d\vartheta \int_{\frac{k}{\cos\vartheta}}^{a} \frac{dr}{r} = 0, \tag{195}$$

$\therefore$ la dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$ est continue.

§ 28. *Changement de la valeur de la dérivée en traversant le plan.* On trouve facilement qu'en un point de la surface la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ varie continuellement quand la direction de dérivation varie continuellement. Au contraire, si l'on

change brusquement la direction en la direction opposée, la dérivée pourra changer brusquement de valeur. Soient ds_+ et ds_- deux élements émanants du point P de la surface dans deux directions opposées. Les formules pour $\frac{\partial V}{ds_-}$ s'obtiennent de ceux qui existent pour $\frac{\partial V}{\partial s_+}$, si on y change ω en $\omega + \pi$. Par suite T'' (131) change en $-T''$, et on obtient

$$(196) \qquad \frac{\partial V}{\partial s_+} + \frac{\partial V}{\partial s_-} = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ 2 + u \log \frac{1-u}{1+u} \right\} d\vartheta .$$

Si la densité σ est continue, on aura

$$(197) \qquad \frac{\partial V}{\partial s_+} + \frac{\partial V}{\partial s_-} = -4\pi\sigma \sin\psi .$$

Remarque I. Si la direction (ω, ψ) de ds change brusquement en la direction correspondante $(\omega, -\psi)$ de l'autre côté du plan, la valeur de $\frac{\partial V}{\partial s}$ ne change point.

Supposons maintenant que le point P se meut suivant une courbe qui traverse le plan au point P_0. Nous trouverons que $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ prend la valeur qu'aura la limite de $\frac{\partial V_h}{\partial s}$, lorsqu'on y substitue $\omega + \pi$ et $-\nu$ à ω et à ν resp. En marquant les deux côtés par les signes $+$ et $-$, nous trouverons (139)

$$(198) \qquad \lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_+ - \lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_- = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[\frac{-2\beta_{10}}{1-u_0^2} + \beta_2 \left(\frac{2u_0}{1-u_0^2} - \log\frac{1-u_0}{1+u_0} \right) \right] d\vartheta ,$$

parce que β_{10} change en $-\beta_{10}$, et u_0 en $-u_0$, tandis que β_2 et U ne changent point. Pour les dérivées suivant les trois axes nous aurons

$$(199) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial x}\right)_+ - \lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial x}\right)_- &= -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[\frac{2\cos\psi_0 \sin\vartheta \sin(\vartheta - \omega_0)}{1-u_0^2} + \cos\vartheta \log\frac{1-u_0}{1+u_0} \right] d\vartheta \\ \lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial y}\right)_+ - \lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial y}\right)_- &= \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[\frac{2\cos\psi_0 \cos\vartheta \sin(\vartheta - \omega_0)}{1-u_0^2} - \sin\vartheta \log\frac{1-u_0}{1+u_0} \right] d\vartheta \end{aligned} \right.$$

$$(199)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial z}\right)_+ - \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial z}\right)_- = -2\sin\psi_0\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\frac{d\vartheta}{1-u_0^2}\\ &u_0 = \cos\psi_0\cos(\vartheta-\omega_0).\end{aligned}\right.$$

Cas particuliers. 1°. Si la densité σ est continue, on trouvera que les dérivées par rapport aux axes des x et des y n'éprouvent pas de changement brusque, lorsque le point P traverse le plan, mais que la dérivée par rapport à l'axe des z éprouve un changement brusque de $-4\pi\sigma$.

2°. Pour $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ on trouvera

$$(200)\qquad \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial z}\right)_+ - \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial z}\right)_- = -2\int_0^{2\pi}\sigma_0 d\vartheta\,.$$

3°. Si l'on considère un point sur la ligne de séparation de deux couches homogènes de densités σ_1 et σ_2, on trouvera (159), en supposant que le point P se meut toujours dans le plan normal passant par la ligne de séparation,

$$(201)\qquad \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_+ - \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_- = -2\pi(\sigma_1+\sigma_2)\sin\psi,$$

l'élément ds étant dirigé dans une direction quelconque qui fait l'angle ψ avec la surface, l'angle ψ étant compté positif du côté positif du plan.

Remarque II. Le changement de la dérivée quand le point P traverse le plan est toujours fini, même dans le cas où les dérivées $\lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial x}$ et $\lim\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial y}$ n'existent point, pourvu qu'on définisse le premier membre de l'égalité (198) de la manière suivante

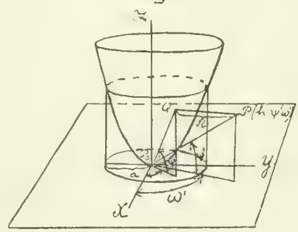
$$(202)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_+ - \lim_{h=0}\left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_- = \lim_{\substack{h=0\\h'=0}}\left[\left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_+ - \left(\frac{\partial V_{h'}}{\partial h'}\right)_-\right]\\ &\lim\frac{h'}{h}\ \text{finie et} \neq 0\ \text{(cfr. § 16. Rem. I).}\end{aligned}\right.$$

CHAPITRE III.

La dérivée première du potentiel d'une simple couche. Surface courbe.

§ 29. *Surface physiquement régulière.* Nous nommerons dans la suite une surface «physiquement régulière» au point P_0 (fig. 8), si par ce point on peut mener une ligne à tangente déterminée qui ne la rencontre qu'en ce point P_0, et dont tous les points qui n'appartiennent pas au voisinage de P_0 sont à une distance finie de la surface. Nous supposerons de plus qu'on peut faire passer par le point P_0 un plan, de manière que la normale de ce plan qui passe par un point quelconque du plan dans le voisinage du point P_0 ne rencontre la surface considérée que dans un nombre fini de points.

Fig. 8.



Décrivons autour du point P_0 comme centre un cercle de rayon a sur ledit plan, et faisons passer par sa circonférence un cylindre droit. Ce cylindre intercepte une certaine partie de la surface considérée, et nous pourrons nous borner à considérer seulement la portion du potentiel qui se rapporte à cette portion de la surface, supposée physiquement régulière au point P_0. Posons

$$V = \int \frac{d\mu}{R}, \tag{203}$$

où $d\mu$ est l'élément de masse répandue sur la surface considérée, et R la distance PQ du point $P(x, y, z)$ au point $Q(\xi, \eta, \zeta)$, où se trouve cet élément de masse.

Nous voulons maintenant faire une troisième supposition, c'est qu'on aura pu choisir le plan, de manière qu'on pourra écrire

$$V = \int \frac{\sigma\, d\omega}{R}, \tag{203*}$$

où $d\omega$ est l'élément du cercle considéré, sans que la fonction σ ne devienne infinie ni indéterminée. L'intégrale est prise autant de fois sur la surface du cercle qu'il y a de points différents de la surface qui correspondent au même point du cercle. Pour fixer les idées nous supposerons dans la suite — ce qui n'est

pas indispensable — qu'à chaque point du cercle correspond un, et un seul, point de la portion considérée de la surface.

Prenons le point P_0 comme origine et les axes des x et des y dans ce plan lui-même.

30. *Le point P est situé dans la surface.* Dans ce cas nous pouvons supposer que le point P coïncide avec le point P_0, et nous trouverons comme dans le § 20 pour les potentiels V et V_h qui se rapportent aux points P_0 et P' les formules

$$(204)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{h}(V_h - V) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{a} \sigma(r, \vartheta)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) r\,dr \\ R = P_0 Q = \dfrac{r}{\cos\psi} \\ R' = P' Q = \sqrt{R^2 - 2Rhu + h^2} \\ h = P_0 P' \\ u = \cos(P_0 Q,\ P_0 P') = \cos\psi' \cos\psi \cos(\vartheta - \omega') + \sin\psi' \sin\psi, \end{cases}$$

ψ' et ω' étant les coordonnées polaires du point $P'(x', y', z')$, de manière que $x' = h\cos\psi'\cos\omega'$ etc., l'angle ω' peut être supposé $= 0$.; ψ et ω sont des coordonnées analogues pour le point $Q(\xi, \eta, \zeta)$.

Posons

$$r = ht$$

$$\therefore \frac{1}{h}(V_h - V) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\ \vartheta)\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q}\right) t\,dt$$

$$(205)\quad \begin{cases} q = \dfrac{t}{\cos\psi} \\ q' = \sqrt{q^2 - 2qu + 1} = q\left[1 - \dfrac{u}{q} + \dfrac{1}{q^2} P\left(\dfrac{1}{q}\right)\right],\ \ \lim\limits_{q=\infty} P\left(\dfrac{1}{q}\right) \text{ finie}, \end{cases}$$

$$(206)\quad \begin{cases} \therefore \dfrac{1}{h}(V_h - V) = W_{sh} + Q_{sh} \\ W_{sh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^{a} \sigma(r,\ \vartheta)\, u \cos^2\psi \frac{dr}{r} \\ Q_{sh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{1} \sigma(ht,\ \vartheta)\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q}\right) t\,dt + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\ \vartheta)\left[\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} - \frac{u}{q^2}\right] t\,dt. \end{cases}$$

Le potentiel V_h étant toujours fini, quand la fonction σ est finie, on conclut, en posant $\sigma = 1$, qu'on aura toujours

(207) $$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{q=w} \frac{t\,dt}{q'} = \text{une quantité finie, } w > 1,$$

$$\therefore \lim_{h=0} Q_{sh} \text{ est toujours finie.}$$

(208) $$\begin{cases} \therefore \dfrac{\partial V}{\partial s} = W_s + Q_s \\ W_s = \lim\limits_{h=0} W_{sh} \\ W_{sh} = \cos\psi' \, W_{xh} + \sin\psi' \, W_{zh} \\ W_{xh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\vartheta\, d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \cos^3\psi \frac{dr}{r} \\ W_{zh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \sin\psi \cos^2\psi \frac{dr}{r} \\ Q_s = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \cos^2\psi_0\, d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos\psi_0}} \left(\frac{1}{q_0'} - \frac{1}{q_0}\right) q_0\, dq_0 + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \cos^2\psi_0\, d\vartheta \int_{\frac{1}{\cos\psi_0}}^{\infty} \left[\frac{q_0}{q_0'} - 1 - \frac{u_0}{q_0}\right] dq_0 = \\ \qquad = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[1 + u_0 + u_0 \log\left(\frac{1 - u_0}{2} \cos\psi_0\right)\right] \cos^2\psi_0\, d\vartheta \end{cases}$$

$$t = q_0 \cos\psi_0, \quad q_0' = \sqrt{q_0^2 - 2 q_0 u_0 + 1}$$

(209) $$u_0 = \cos\psi_0' \cos\psi_0 \cos\vartheta + \sin\psi_0' \sin\psi_0$$

(210) $$\begin{cases} \sigma_0(\vartheta) = \lim\limits_{r=0} \sigma(r, \vartheta) \\ \psi_0(\vartheta) = \lim\limits_{r=0} \psi(r, \vartheta) \\ \psi_0' = \lim\limits_{h=0} \psi'(h, \omega') \\ \psi = \psi(r, \vartheta) \text{ étant l'équation de la surface.} \end{cases}$$

D'où le théorème:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *est que la quantité* W_s *existe* (208).

Corollaire. Si W_s existe, donc

$$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) u_0 \cos^2 \psi_0 \, d\vartheta = 0. \tag{211}$$

Remarque I. Si la fonction σ est continue et l'angle ψ'_0 constant $\neq 0$, il faut, pour que W_s existe, que $\psi'_0 = 0$ (211). On trouvera dans ce cas (cfr. 133)

$$Q_s = -2\pi\sigma \sin \psi'_0 \cos^2 \psi'_0. \tag{212}$$

Remarque II. On peut remplacer h (208) par $h\varphi(h, \vartheta)$, si l'on ajoute dans l'expression de Q_s le terme

$$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \cos^2 \psi'_0 \log \varphi_0(\vartheta) d\vartheta, \quad \varphi_0(\vartheta) \equiv \lim_{h=0} \varphi(h, \vartheta). \tag{213}$$

§ 31. **Cas particuliers.** I. $\psi'_0 = 0$ (*point régulier*). On retrouvera pour Q_s a valeur correspondante du cas du plan (131), c.-à-d. $Q_s = M'$.

II. $\psi'_0 =$ *une constante* $\neq \frac{\pi}{2}$ (*point conique*). Nous trouverons pour Q_z l'expression

$$Q_z = -\left[1 + \sin \psi'_0 + \sin \psi'_0 \log \left(\frac{1 - \sin \psi'_0}{2} \cos \psi'_0\right)\right] \cos^2 \psi'_0 \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) d\vartheta. \tag{214}$$

Pour que W_z soit finie, il faut que σ_0 soit $= 0$.

Remarque. Si la fonction σ est constante, nous trouverons pour une direction perpendiculaire à l'axe du cône

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0; \tag{215}$$

pour toute autre direction ($\psi'_0 \neq 0$) la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ est infinie, si σ_0 est $\neq 0$.

III. $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ (*point de rebroussement*). Posons

$$\left\{\begin{aligned} \psi &= \frac{\pi}{2} - \gamma \\ W_{xh} &= \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \, d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \sin^3 \gamma \frac{dr}{r} \end{aligned}\right. \tag{216}$$

(216)
$$\begin{cases} W_{zh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta)\cos\gamma\sin^2\gamma\frac{dr}{r} \\ Q_s = 0. \end{cases}$$

Le cas où $\lim\limits_{r=0}\sigma$ est infinie, a un intérêt particulier. Car dans les cas pratiques σ représente la densité divisée par le cosinus de l'angle que fait la normale de la surface avec la normale du plan de projection. Soient $\frac{\pi}{2}-\gamma_1$ cet angle et μ_1 la densité,

(217)
$$\therefore\ \sigma = \frac{\mu_1}{\sin\gamma_1}\cdot$$

Si l'on suppose $\lim\frac{\gamma}{\gamma_1}$ finie, on trouvera qu'en général la quantité Q_s est finie, même dans le cas grande où la densité μ_1 est infiniment grande comme $\frac{1}{\gamma}$. Pour

(218)
$$\sigma = \frac{r}{\sin^2\gamma}$$

nous aurons

(219)
$$\begin{cases} W_{xh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\vartheta\, d\vartheta \int_h^a r\sin\gamma\frac{dr}{r} \\ W_{zh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a r\cos\gamma\frac{dr}{r}\cdot \end{cases}$$

§ 32. $\operatorname{Lim}\limits_{h=0}\frac{\partial V_h}{\partial s}$, *lorsque la courbe* P_0PP_1 *ne touche pas la surface.* Nous supposerons maintenant que le point P part au dessus du plan et s'approche de la surface suivant une courbe P_0PP_1 qui ne la rencontre qu'au point P_0 et ne l'y touche pas. Nous trouverons (cfr. 137 et 204)

$$\frac{\partial V_h}{\partial s} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht, \vartheta)\frac{-\beta'_1+\beta'_2 q}{q'^3}\, t\, dt$$

$$q' = \sqrt{q^2 - 2qu + 1},\ q = \frac{t}{\cos\psi},\ P_0P = h,$$

$$\therefore\ \frac{-\beta'_1+\beta'_2 q}{q'^3}\, t = \frac{\beta'_2}{t}\cos^2\psi + \frac{1}{t^2}P\left(\frac{1}{t}\right),\ \lim_{t=\infty} P\left(\frac{1}{t}\right) \text{ finie,}$$

$$(220)\begin{cases} \therefore \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = W'_{sh} + Q'_{sh} \\[2ex] W'_{sh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\,\beta'_2 \cos^2\psi \frac{dr}{r} \\[2ex] Q'_{sh} = -\beta'_1 \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\vartheta)\cos\psi \frac{q\,dt}{q'^3} + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sigma(ht,\vartheta)\,\beta'_2 \cos\psi \frac{q^2 dt}{q'^3} + \\[2ex] \qquad + \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \sigma(ht,\vartheta)\,\beta'_2 \cos\psi \left[\frac{q^2}{q'^3} - \frac{1}{q}\right] dt \\[2ex] \quad \equiv \lambda Q'_{xh} + \mu Q'_{yh} + \nu Q'_{zh} \end{cases}$$

$$(221)\begin{cases} u = \cos\psi'\cos\psi\cos(\vartheta-\omega') + \sin\psi'\sin\psi \\ \beta'_1 = \lambda\cos\psi'\cos\omega' + \mu\cos\psi'\sin\omega' + \nu\sin\psi' \\ \beta'_2 = \lambda\cos\psi\ \cos\vartheta\ + \mu\cos\psi\ \sin\vartheta\ + \nu\sin\psi. \end{cases}$$

En passant à la limite, nous trouverons

$$(222)\begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = W_s + Q'_s \\[1ex] W_s = \lim\limits_{h=0} W_{sh} \\[1ex] W_{sh} = \lambda W_{xh} + \mu W_{yh} + \nu W_{zh} \\[1ex] W_{xh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos\vartheta\, d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\cos^3\psi \frac{dr}{r} \\[2ex] W_{yh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\cos^3\psi \frac{dr}{r} \\[2ex] W_{zh} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)\sin\psi\cos^2\psi \frac{dr}{r} \\[2ex] Q'_s = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ \frac{-\beta'_{10}}{1-u_0} + \frac{\beta'_{20}}{1-u_0} - 2\beta'_{20} - \beta'_{20} \log\frac{(1-u_0)\cos\psi_0}{2} \right\} \cos^2\psi_0\, d\vartheta \\[2ex] \psi_0 = \lim\limits_{r=0} \psi \ \text{etc.} \end{cases}$$

Si la courbe $P_0 P P_1$ ne touche pas la surface, ψ'_0 est $\neq \psi'_0$ $\therefore u_0$ ne peut pas devenir $= 1$, $\therefore$ la quantité Q'_s est toujours finie. Dans ce cas $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ existe en même temps que la quantité W_s (cfr. (208)). D'où le théorème:

Théorème. *Si la courbe $P_0 P P_1$ ne touche pas la surface, donc $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ existe en même temps que la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$.*

Corollaire. $\operatorname{Lim}\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ existe en même temps pour les deux côtés de la surface.

Remarque I. Pour la dérivée, prise dans la direction de la tangente au point P_0 de la courbe $P_0 P P_1$, on trouvera

$$\beta'_{10} = 1, \quad \beta'_{20} = u_0$$

$$(223) \qquad \begin{cases} W_s = \lim\limits_{h=0} \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_h^a \sigma(r, \vartheta)\, u \cos^2\psi\, \frac{dr}{r} \\ Q'_s = -\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ 1 + 2u_0 + u_0 \log \frac{(1 - u_0)\cos\psi'_0}{2} \right\} \cos^2\psi'_0\, d\vartheta, \end{cases}$$

par suite, si W_s existe, $Q'_s = Q_s$ (208, 211).

Remarque II. *Soit* $\psi_0 = 0$. Nous retrouverons pour Q'_s les formules du cas du plan (139) c.-à-d.

$$Q'_s = N.$$

Corollaire. Si la quantité σ est continue, on trouvera (cfr. (143)) pour $\psi'_0 = 0$

$$Q'_s = Q_s.$$

D'où le théorème (cfr. § 22 Remarque II):

Théorème. *Si $\frac{\partial V}{\partial s}$ existe,*

$$(224) \qquad \lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s} \text{ est } = \frac{\partial V}{\partial s},$$

1° *si la dérivée est prise dans la direction de la tangente au point P_0 de la courbe $P_0 P P_1$;*

2° *si la fonction σ est continue au point P_0, et si la surface y a un plan tangent bien déterminé.*

§ 33. *$\operatorname{Lim}\limits_{h=0} \frac{dV_h}{ds}$, lorsque la courbe $P_0 P P_1$ touche la surface.* Dans ce cas $\lim\limits_{h=0} \psi' = \psi_0(\omega'_0)$. Supposons $\omega' = 0$. Comme dans le § 23 nous écrivons (220)

$$(225)\qquad Q'_{xh}=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht,\vartheta)\cos\psi\,[q\cos\psi\cos\vartheta-\cos\psi']\frac{q\,dt}{q'^3}+\bar{Q}_x\,,\quad \lim_{h=0}\bar{Q}_x \text{ finie,}$$

t_1 et t_2 étant les valeurs de t qui correspondent aux valeurs limites $1-\varkappa$ et $1+\varkappa$ de $q=\dfrac{t}{\cos\psi'}$ (205), $1>\varkappa>0$. Posons

$$(226)\qquad \begin{cases} \cos\delta\equiv u=\cos\psi'\cos\psi\cos\vartheta+\sin\psi'\sin\psi, \\ \therefore\ 1-u^2=\sin^2\vartheta\cos^2\psi+[\sin(\psi-\psi')+\sin\psi'\cos\psi(1-\cos\vartheta)]^2= \\ \qquad\qquad =\sin^2\vartheta\cos^2\psi'+[\sin(\psi'-\psi)+\cos\psi'\sin\psi(1-\cos\vartheta)]^2 \\ q'=\sqrt{(q-1)^2+2q(1-u)}=\sqrt{(q-u)^2+1-u^2} \\ 2(1-u)\geqq 1-u^2, \\ \therefore\ q'\geqq\sin\delta \\ \dfrac{|q-1|}{q'}\leqq 1,\quad \dfrac{1-u}{q'^2}\leqq 1\ (u\geqq 0),\quad \dfrac{\cos\psi'\sin\vartheta}{q'}\leqq 1,\quad \dfrac{\cos\psi\sin\vartheta}{q'}\leqq 1. \end{cases}$$

Pour des valeurs assez petites de $|\psi'-\psi|$ et de ϑ nous aurons de plus

$$(227)\qquad \frac{|\sin(\psi'-\psi)|}{q'}\leqq 1.$$

Enfin nous tirons de l'égalité (207)

$$(228)\qquad \lim_{h=0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta\int_{t_1}^{t_2}\cos\psi\frac{dt}{q'}=\text{une quantité finie.}$$

Si nous écrivons l'idéntité

$$(229)\qquad \begin{cases} \dfrac{q^2\cos^2\psi\cos\vartheta-q\cos\psi'\cos\psi}{q'^3}=\cos^2\psi\cos\vartheta\dfrac{(q-1)^2}{q'^3}-2\cos^2\psi\dfrac{(q-1)(1-\cos\vartheta)}{q'^3}+ \\ +\cos\psi\dfrac{(\cos\psi-\cos\psi')(q-1)}{q'^3}-\cos^2\psi\dfrac{1-\cos\vartheta}{q'^3}+\cos^2\psi\dfrac{q-1}{q'^3}+\cos\psi\dfrac{\cos\psi-\cos\psi'}{q'^3}, \end{cases}$$

nous trouverons qu'en vertu des égalités (226), (227) et (228) les trois premiers termes du second membre fourniront des termes à limites finies dans le second membre de l'égalité (225). Si nous posons de plus

$$q'_0=\sqrt{(q-1)^2+2(1-u)},$$

nous trouverons pour $q>1$

$$o < \frac{1}{q_0'^3} - \frac{1}{q'^3} = \left(\frac{1}{q_0'} - \frac{1}{q'}\right)\left(\frac{1}{q_0'} + \frac{1}{q'}\right)^2 - \left(\frac{1}{q_0'} - \frac{1}{q'}\right)\frac{1}{q_0' q'} < \left(\frac{1}{q_0'^2} - \frac{1}{q'^2}\right)\frac{2}{q_0'} < \frac{4}{q'^2},$$

$$(230) \qquad \therefore \frac{q-1}{q_0'^3} - \frac{q-1}{q'^3} < \frac{4}{q'} \text{ etc.,}$$

et nous trouverons aussi un résultat analogue pour $q < 1$. D'où il suit qu'on pourra remplacer q' par q_0' dans les termes de l'égalité (225) que fourniront les trois derniers termes du second membre de l'égalité (229). Enfin on pourra remplacer q_0' par

$$(231) \qquad \begin{cases} q = \sqrt{(q-1)^2 + \delta^2} \\ \delta^2 \equiv \vartheta^2 \cos^2 \psi' + [\psi' - \psi + \cos \psi' \sin \psi (1 - \cos \vartheta)]^2. \end{cases}$$

Par suite la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité $\lim\limits_{h=0} Q'_{xh}$ soit finie, est que la quantité

$$S_x = \lim_{h=0} S_{xh}$$

est finie, où

$$(232)\ S_{xh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta)\{\cos^2\psi(q-1) + \cos\psi(\cos\psi - \cos\psi') - \cos^2\psi(1-\cos\vartheta)\}\frac{dt}{q^3}.$$

De même nous pourrons écrire

$$Q'_{yh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta) \cos^2\psi\, q^2 \frac{dt}{q'^3} + \overline{Q}_y, \ \lim_{h=0} \overline{Q}_y \text{ finie.}$$

En posant

$$q = (q-1) + 1 \text{ etc.}$$

nous trouverons que la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité $\lim\limits_{h=0} Q'_{yh}$ soit finie, est que la quantité

$$S_y = \lim_{h=0} S_{yh}$$

est finie, où

$$(233) \qquad S_{yh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta) \cos^2\psi \frac{dt}{q^3}.$$

Enfin nous écrirons

$$Q'_{zh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta) \cos\psi \, (q^2 \sin\psi - q\sin\psi') \frac{dt}{q'^3} + \overline{Q}_z, \ \lim_{h=0} \overline{Q}_z \text{ finie,}$$

et

$$q^2 \sin\psi \cos\psi - q\sin\psi' \cos\psi = \sin\psi\cos\psi\,(q-1)^2 + \cos\psi\,(q-1)(\sin\psi - \sin\psi') + \\ + \sin\psi\cos\psi\,(q-1) + \cos\psi\,(\sin\psi - \sin\psi'), \text{ etc.,}$$

et nous trouverons que la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité $\lim\limits_{h=0} Q_{zh}$ soit finie, est que la quantité

$$S_z = \lim_{h=0} S_{zh}$$

est finie, où

$$(234) \qquad S_{zh} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta) \{\sin\psi\cos\psi\,(q-1) + \cos\psi\,(\sin\psi - \sin\psi')\} \frac{dt}{q^3}.$$

Soient

$$(235) \qquad \begin{cases} S_{sh} = \lambda S_{xh} + \mu S_{yh} + \nu S_{zh} \\ S_s = \lim\limits_{h=0} S_{sh}, \end{cases}$$

donc nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si* $\dfrac{\partial V}{\partial s}$ *existe au point* P_0, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h}{\partial s}$ *soit finie et déterminée, lorsque la courbe* $P_0 P P_1$ *touche la surface, est que la quantité* S_s (235) *est finie et déterminée.*

§ **34.** $\mathit{Lim}_{h=0}\ \psi' \neq \dfrac{\pi}{2}$. Dans ce cas, on peut écrire

$$(236) \qquad \begin{cases} S_{xh} = \cos^2\psi' J_1 + \sin\psi' \cos\psi' J_2 \\ S_{yh} = \cos^2\psi' J_3 \\ S_{zh} = \sin\psi' \cos\psi' J_1 - \cos^2\psi' J_2 \\ J_1 = \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta)(q-1)\frac{dt}{q^3} \\ J_2 = \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{t_1}^{t_2} \sigma(ht, \vartheta)(\psi' - \psi)\frac{dt}{q^3} \end{cases}$$

$$
(236)\quad \left|\begin{array}{l}
J_3 = \int\limits_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int\limits_{t_1}^{t_2} \sigma_2(ht, \vartheta) \frac{dt}{q^3} \\
q = \sqrt{(q-1)^2 + \delta^2}, \quad q = \frac{t}{\cos\psi} \\
\delta^2 = \vartheta^2 \cos^2\psi' + (\psi' - \psi)^2 \\
\sigma_2(r, \vartheta) = \sigma(r, \vartheta) + \sigma(r, 2\pi - \vartheta).
\end{array}\right.
$$

1°. **Point conique.** Soit l'angle ψ indépendant de r. Pour

$$t = q\cos\psi, \quad |q - 1| = \tau$$

nous trouverons, aux quantités à limites finies ou infiniment petites près,

$$
(237)\quad \left\{\begin{array}{l}
J_1 = \cos\psi' \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int\limits_0^{\varkappa} (\sigma_+ - \sigma_-) \frac{\tau\, d\tau}{(\tau^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}} \\
J_2 = \cos\psi' \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} (\psi' - \psi)\, d\vartheta \int\limits_0^{\varkappa} (\sigma_+ + \sigma_-) \frac{d\tau}{(\tau^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}} \\
J_3 = \cos\psi' \int\limits_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int\limits_0^{\varkappa} (\sigma_{2+} + \sigma_{2-}) \frac{d\tau}{(\tau^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\sigma_+ = \sigma(1 + \tau h \cos\psi, \vartheta) \\
\sigma_- = \sigma(1 - \tau h \cos\psi, \vartheta).
\end{array}\right.
$$

Remarque. Pour $\psi = 0$ on retrouvera le cas du plan (150).

2°. **Point analytique.** Supposons que la fonction $\psi(r, \vartheta)$ admet une dérivée par rapport à r, et posons

$$t = q\cos\psi$$

$$\therefore\ dt = \cos\psi\, dq - q\sin\psi \frac{\partial\psi}{\partial r} h\, dt = \cos\psi \left[1 - q\sin\psi \,.\, h\frac{\partial\psi}{\partial r}\right] dq +$$

des quantités d'ordres supérieurs. Nous supposerons de plus

$$(238)\quad \lim_{h=0} h\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0.$$

Donc nous retrouverons les formules (237) à quelques termes près, qui sont en général infiniment petits par rapport aux termes des seconds membres. Mais dans ce cas il faut écrire

$$J_2 = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_0^{\varkappa} (\sigma_+ + \sigma_-)(\psi' - \psi) \frac{d\tau}{(\tau^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3°. $\lim\limits_{r=0} \psi = 0$, $\lim \dfrac{\psi'}{\psi} \neq 1$. Dans ce cas nous pourrons remplacer, dans q, $\cos\psi'$ par unité. En effet, soient

$$\bar{q}' = \sqrt{(t-1)^2 + \delta'^2},\ \delta'^2 = \vartheta^2 + (\psi' - \psi)^2,\ \psi = c\,\psi',\ \therefore\ \frac{\psi'}{\bar{q}} < \frac{1}{|c-1|},\ \bar{q}' \geqq \bar{q},$$

$$\therefore\ 0 < \frac{1}{\bar{q}^3} - \frac{1}{\bar{q}'^3} < \left(\frac{1}{\bar{q}'^2} - \frac{1}{\bar{q}^2}\right)\left(\frac{1}{\bar{q}'} + \frac{1}{\bar{q}}\right) \leqq \frac{2}{(c-1)^2} \cdot \frac{1}{\bar{q}'},\ \text{etc.}$$

Nous trouverons donc, aux quantités près dont les limites sont finies ou infiniment petites,

$$(239)\qquad \begin{cases} S_{xh} = J_1 = \displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht, \vartheta)(t-1) \frac{dt}{(\overline{t-1}^2 + \delta'^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ S_{yh} = J_3 = \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma_2(ht_1 \vartheta) \frac{dt}{(\overline{t-1}^2 + \delta'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ S_{zh} = -J_2 = -\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int_{1-\varkappa}^{1+\varkappa} \sigma(ht_1\, \vartheta)(\psi' - \psi) \frac{dt}{(\overline{t-1}^2 + \delta'^2)^{\frac{3}{2}}}. \\ \delta'^2 = \vartheta^2 + (\psi' - \psi)^2. \end{cases}$$

§ 35. *Point de rebroussement.* Soit $\lim\limits_{h=0} \psi' = \dfrac{\pi}{2}$. Posons

$$(240)\qquad \psi = \frac{\pi}{2} - \gamma,\ \psi' = \frac{\pi}{2} - \gamma',\ \therefore\ \lim_{h=0} \gamma = 0 \text{ pour } \vartheta = 0,\ \text{et} \lim_{h=0} \psi' = 0.$$

Dans ce cas les limites de t_1 et t_2 de t deviennent infiniment petites; pourtant, dans la discussion de la quantité Q'_{sh}, il suffit de considérer la partie de l'intégrale qui se rapporte à ces mêmes limites. En effet, soit $F(t)$ une fonction de t, telle que

$$|F(t)| < M \text{ pour } 0 \leqq t \leqq 1,\ M \text{ étant une constante finie.}$$

Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 F(t) \frac{dt}{q''} = \int_0^{t_1} F(t) \frac{dt}{q''} + \int_{t_1}^{t_2} F(t) \frac{dt}{q''} + \int_{t_2}^1 F(t) \frac{dt}{q''}.$$

La valeur absolue de la première intégrale du second membre est $< \frac{t_1}{\varkappa^n} M$, et celle de la troisième intégrale $< \frac{1 - t_2}{\varkappa^n} M$, donc etc.

Soient γ_1 et γ_2 les valeurs de γ qui correspondent aux valeurs $1 - \varkappa$ et $1 + \varkappa$ de q, et soit $\bar{\gamma}$ la valeur minimum de γ pour $t_1 \leqq t \leqq t_2$. Nous faisons la supposition que

$$(241) \qquad \lim_{h=0} \frac{\gamma_2}{\bar{\gamma}} \text{ est finie,}$$

ce qui aura lieu par ex., si la section de la surface qui passe par la tangente a une courbure finie et déterminée au point P_0. Nous disons que, si $\lim\limits_{h=0} \frac{\gamma}{\gamma'} = c_0' \neq 1$,

$$(242) \qquad \lim_{h=0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{q''} \text{ est finie, } q'' = \sqrt{(q-1)^2 + \gamma'^2 \sin^2 \vartheta + [\gamma - \gamma' + \gamma'(1 - \cos \vartheta)]^2}.$$

En effet, soit

$$(243) \qquad \begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma'} = c \\ \therefore q'' = \sqrt{(q-1)^2 + \lambda^2 \gamma'^2} \\ \lambda^2 = c^2 - 2c \cos \vartheta + 1 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{q''} < \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\lambda \gamma'} = \frac{(1+\varkappa)\gamma_2 - (1-\varkappa)\gamma_1}{\lambda' \gamma'} < \frac{1+\varkappa}{\lambda'} \frac{\gamma_2}{\bar{\gamma}} \cdot \frac{\bar{\gamma}}{\gamma'},$$

λ' étant une valeur moyenne de λ, donc etc.

Nous trouverons que les limites pour $h = 0$ des trois quantités S_{xh} (232), S_{yh} (233) et S_{zh} (234) sont toutes finies.

$$\therefore \lim_{h=0} Q'_{sh} \text{ est toujours finie.}$$

Si nous supposons $\lim\limits_{h=0} \sigma = \infty$, nous pourrons écrire

$$(244) \qquad \sigma = \frac{\mu}{\gamma},$$

où nous supposerons que $\lim\limits_{h=0} \mu$ est finie. Posons

$$(245)\quad\begin{cases} S'_{sh} = \lambda S'_{xh} + \mu S'_{yh} + \nu S'_{zh} \\ S'_{xh} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu(ht,\vartheta)\,[\gamma - \gamma' - \gamma'(1-\cos\vartheta)]\,\frac{dt}{q''^3} \\ S'_{yh} = \int\limits_{0}^{\varepsilon} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu_2(ht,\vartheta)\,\gamma\,\frac{dt}{q''^3}, \quad \mu_2(ht,\vartheta) \equiv \mu(ht,\vartheta) - \mu(ht, 2\pi - \vartheta) \\ S'_{zh} = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\vartheta \int\limits_{t_1}^{t_2} \mu_1(ht,\vartheta)\,(q-1)\,\frac{dt}{q''^3} \\ q = \frac{t}{\gamma'}, \quad t_1 = (1-\varkappa)\gamma_1, \quad t_2 = (1+\varkappa)\gamma_2, \end{cases}$$

donc nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si les branches de la section de la surface par la tangente au point P_0 ont des courbures finies et déterminées* (*cfr.* (241)), *et si P_0PP_1 n'a pas de contact avec la surface d'un ordre plus élevé que celui qu'a la tangente au point P_0, enfin si en ce même point $\frac{\partial V}{\partial s}$ existe, donc $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ est finie:*

1° *si la fonction σ est toujours finie;*

2° *si, la fonction μ* (244) *étant toujours finie, la quantité*

$$(246)\qquad S'_s \equiv \lim_{h=0} S'_{sh} \text{ est finie.}$$

Remarque. Si $\gamma' = 0$ il faut écrire

$$(247)\qquad q'' = \sqrt{(q-1)^2 + \gamma^2}.$$

Cas particulier. Si $\lim\limits_{r=0} \frac{r}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial r}$ est finie et $\neq 1$, donc la quantité S'_s est finie pour $\lambda \neq 0$.

§ **36.** *Existence et continuité de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ et de $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ en un point quelconque.* L'existence de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ en un point situé dans la surface ou celle de la limite de la dérivée extérieure dépend essentiellement de l'existence de la quantité $W_s = \lim\limits_{h=0} W_{sh}$ (222). Cette quantité W_{sh} peut s'écrire pour le point $P(r = k > 0,\ \omega' = 0)$

$$
(248)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&W'_{sh} = \int\limits_{(h)}^{(a)} \sigma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial s}\, d\omega = \int\limits_{(h)}^{(a)} \sigma v \frac{d\omega}{R^2} \\
&R = PQ = \sqrt{\left(\frac{r}{\cos\psi}\right)^2 - 2\frac{r}{\cos\psi}\cdot\frac{ku}{\cos\psi'} + \left(\frac{k}{\cos\psi'}\right)^2} \\
&k = P_0 P \cos\psi' \\
&u = \cos\psi'\cos\psi\cos\vartheta + \sin\psi'\sin\psi \\
&v = \cos(ds,\ PQ) = \lambda v_x + \mu v_y + \nu v_z \\
&v_x = \frac{r\cos\vartheta - k}{R},\quad v_y = \frac{r\sin\vartheta}{R},\quad v_z = \frac{r\operatorname{tg}\psi - k\operatorname{tg}\psi'}{R}.
\end{aligned}
\right.
$$

L'intégration peut être prise sur la portion considérée de la surface, excepté la partie du voisinage de P pour laquelle

$$1 - \varkappa \leq \frac{r\cos\psi'}{\cos\psi} \leq 1 + \varkappa,$$

$0 < \varkappa < 1$ (cfr. § 30 Rem. II). En posant comme dans le § 26

$$W_{sh} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

nous pourrons traiter l'intégrale I_5 d'une manière analogue à celle du § 11. En effet, soient P' et Q' les projections de P et de Q sur le plan des xy,

$$\therefore\ R = PQ \geq P'Q' = \sqrt{r^2 - 2rk\cos\vartheta + k^2} = R'$$

$$\therefore\ \int \frac{d\omega}{R^2} \leq \int \frac{d\omega}{R'^2},$$

$d\omega$ étant l'élément de surface du plan des xy. La partie de cette dernière intégrale qui correspond à l'intégrale I_5 peut s'écrire

$$2\int\limits_{k-h}^{k+h} r\,dr \int\limits_{R'=h}^{R'=\bar{R}} \frac{d\vartheta}{R'^2} + 2\int\limits_{k-h}^{k+h} r\,dr \int\limits_{R'=\bar{R}}^{R'=k+r} \frac{d\vartheta}{R'^2},\ \bar{R} \text{ étant une constante finie} > 0,$$

et en prenant R' comme variable indépendante au lieu de ϑ nous trouverons que la première intégrale a une valeur limite finie pour lim $h = 0$, tandis que la limite pour $h = 0$ de la seconde intégrale est $= 0$. Supposons que σ soit continue, et soit σ_k la valeur de σ au point P. Posons

$$I_5 = I'_5 + I^k_5,$$

où I'_5 et I'_5 sont les valeurs que prend I_5 lorsqu'on y substitue à σ les quantités $\sigma - \sigma_k$ et σ_k resp. En prenant la constante R suffisamment petite, nous trouverons que $\lim\limits_{h=0} I'_5$ est $<$ une quantité donnée quelque petite qu'elle soit,

$$(249)\qquad \therefore \lim_{\alpha=0} I_5 = \lim_{\alpha=0} I_5^k,$$

I_5^k étant ce que deviendra I_5 lorsqu'on y substitue à σ la constante σ_k. Les intégrales I_1 et I_2 sont finies, et il nous reste à considérer les intégrales I_3 et I_4. On peut écrire

$$(250)\qquad \begin{cases} I_3 = \lambda I_{x3} + \mu I_{y3} + \nu I_{z3} \\ I_{x3} = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_{s_1=1-\varkappa}^{s_1=1-\alpha} \sigma(ks,\vartheta)\cos\psi\,(s_1^2\cos\psi'\cos\psi\cos\vartheta - s_1\cos^2\psi')\dfrac{ds}{p_1^3} \\ I_{y3} = \int\limits_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int\limits_{s_1=1-\varkappa}^{s_1=1-\alpha} \sigma(ks,\vartheta)\cos\psi'\cos^2\psi\, s_1^2 \dfrac{ds}{p_1^3} \\ I_{z3} = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_{s_1=1-\varkappa}^{s_1=1-\alpha} \sigma(ks,\vartheta)\cos\psi\,(s_1^2\cos\psi'\sin\psi - s_1\sin\psi'\cos\psi')\dfrac{ds}{p_1^3} \\ s_1 = \dfrac{\cos\psi'}{\cos\psi}\, s \\ p_1 = \sqrt{s_1^2 - 2 s_1 u + 1}, \end{cases}$$

et on aura une expression analogue pour I_4. Si nous employons les méthodes du § 33, nous trouverons, en posant

$$(251)\qquad \begin{cases} \bar J_1 = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int\limits_{s_1=1+\alpha}^{s_1=1+\varkappa} \sigma(ks,\vartheta)(s_1 - 1)\dfrac{ds}{\bar p_1^3} - \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int\limits_{s_1=1-\varkappa}^{s_1=1-\alpha} \sigma(ks,\vartheta)(1 - s_1)\dfrac{ds}{\bar p_1^3} \\ \bar J_2 = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int\limits_{s_1=1+\alpha}^{s_1=1+\varkappa} \sigma(ks,\vartheta)(\psi' - \psi)\dfrac{ds}{\bar p_1^3} + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta \int\limits_{s_1=1-\varkappa}^{s_1=1-\alpha} \sigma(ks,\vartheta)(\psi' - \psi)\dfrac{ds}{\bar p_1^3} \\ \bar J_3 = \int\limits_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int\limits_{s_1=1+\alpha}^{s_1=1+\varkappa} \sigma_2(ks,\vartheta)\dfrac{ds}{\bar p_1^3} + \int\limits_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int\limits_{s_1=1-\varkappa}^{s_1=1-\alpha} \sigma_2(ks,\vartheta)\dfrac{ds}{\bar p_1^3} \\ \bar p_1 = \sqrt{(s_1 - 1)^2 + \vartheta^2\cos^2\psi' + (\psi' - \psi)^2},\ \ \sigma_2(r,\vartheta) = \sigma(r,\vartheta) - \sigma(r, 2\pi - \vartheta), \end{cases}$$

que nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *et* $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ *— lorsque la courbe* $P_0 P P_1$ *ne touche pas la surface — existent au point* $P(x = k > 0,\ y = 0)$, *est que la quantité* (251)

(252)
$$\left|\begin{array}{l} \bar{J}_s = \lim_{h=0} \bar{J}_{sh} \text{ est finie où} \\ \bar{J}_{sh} = \lambda \bar{J}_{xh} + \mu \bar{J}_{yh} + \nu \bar{J}_{zh} \\ \bar{J}_{xh} = \cos^3 \psi' \bar{J}_1 + \sin \psi' \cos^2 \psi' J_2 \\ J_{yh} = \cos^3 \psi' \bar{J}_3 \\ \bar{J}_{zh} = \sin \psi' \cos^2 \psi' \bar{J}_1 - \cos^3 \psi' J_2 . \end{array}\right.$$

Corollaire. *Continuité de* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *et de* $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$. *La quantité*

$$Z = \lim_{\alpha=0} [I_1 + (I_2 - W_{sh}) + (I_3 + I_4 - J_{sh}) + I_5]$$

est de la forme

$$K + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{k}} \sigma P \frac{dt}{t^2},\ \lim_{t=\infty} P \text{ finie,}$$

où K *est continue par rapport à* k, $\therefore$ Z *est continue. D'où le théorème:*

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *et* $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ *— si la courbe* $P_0 P P_1$ *ne touche pas la surface — soient continues au point* P *pour un déplacement suivant la surface dans le plan des* xz $(r = k > 0,\ \vartheta = 0)$, *est que la quantité* $\bar{J}_s$ *est continue par rapport à* k.

Si $\frac{\partial V}{\partial s}$ *existe à l'origine, et si*

(253)
$$\lim_{k=0} \bar{J}_s = \bar{J}_s^\circ ,$$

où $\bar{J}_s^\circ$ *est la valeur de* $\bar{J}_s$ *pour* $k = 0$, *donc* $\frac{\partial V}{\partial s}$ *et* $\lim_{h=0} \frac{\partial V_h}{\partial s}$ *— la courbe* $P_0 P P_1$ *ne touchant pas la surface — sont continues à l'origine pour un déplacement suivant la surface dans le plan des* xz.

§ **37.** *Changement de la valeur de la dérivée en traversant la surface.* Les raisonnements du § 28 s'appliquent au cas d'une surface courbe, et les résultats

deviennent identiques dans le cas où $\psi'_0 = 0$ (point régulier), si l'on observe que l'angle ψ du chap. II correspond à l'angle ψ' du chapitre présent. Dans le cas général, l'angle $\psi\,(r, \vartheta)$ se change en $-\psi\,(r, \vartheta)$, lorsqu'on change la direction positive de l'axe des z.

Si pour la dérivée du potentiel au point P_0 la direction de ds change en la direction opposée, nous trouverons que $u = \cos(P_0Q, ds)$ change en $-u$, $\therefore$ u_0 change en $-u_0$ et W_s en $-W_s$ (208),

$$(254)\quad \begin{cases} \therefore \dfrac{\partial V}{\partial s_+} + \dfrac{\partial V}{\partial s_-} = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ 2 + u_0 \log \frac{1 - u_0}{1 + u_0} \right\} \cos^2\psi_0 \, d\vartheta \\ u_0 = \cos\psi' \cos\psi_0 \cos\vartheta + \sin\psi' \sin\psi_0 . \end{cases}$$

Au contraire, si le point P se trouve à l'extérieur de la surface et qu'il traverse la surface au point P_0 suivant une droite, c.-à-d. si la direction de la droite P_0P change en la direction opposée, $\beta'_2 = \cos(P_0Q, ds)$ ne change pas, $\therefore$ W'_s ne change pas (222), mais $u = \cos(P_0Q, P_0P)$ change de signe, $\therefore$ u_0 change en $-u_0$; de même $\beta'_1 = \cos(P_0P, ds)$ change en $-\beta'_1$. Par suite nous trouverons (222)

$$(255)\quad \lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)_+ - \lim_{h=0} \left(\frac{\partial V_{h'}}{ds}\right)_- = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ \frac{2(\beta'_{20} u_0 - \beta'_1)}{1 - u_0^2} - \beta'_{20} \log \frac{1 - u_0}{1 + u_0} \right\} \cos^2\psi_0 \, d\vartheta .$$

Cette formule peut être écrite sous la forme suivante plus développée

$$(256)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_h}{\partial s} = \lambda \dfrac{\partial V_h}{dx} + \mu \dfrac{\partial V_h}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial V_h}{\partial z} \\ \lim\limits_{h=0} \left(\dfrac{\partial V_h}{dx}\right)_+ - \lim\limits_{h'=0} \left(\dfrac{\partial V_{h'}}{dx}\right)_- = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ \frac{2(\cos\psi' - u_0 \cos\psi_0 \cos\vartheta)}{1 - u_0^2} + \cos\psi'_0 \cos\vartheta \log \frac{1 - u_0}{1 + u_0} \right\} \\ \qquad\qquad \cos^2\psi_0 \, d\vartheta \\ \lim\limits_{h=0} \left(\dfrac{\partial V_h}{\partial y}\right)_+ - \lim\limits_{h'=0} \left(\dfrac{\partial V_{h'}}{\partial y}\right)_- = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ \frac{2u_0}{1 - u_0^2} - \log \frac{1 - u_0}{1 + u_0} \right\} \cos^3\psi_0 \sin\vartheta \, d\vartheta \\ \lim\limits_{h=0} \left(\dfrac{\partial V_h}{\partial z_+}\right)_+ + \lim\limits_{h'=0} \left(\dfrac{\partial V_{h'}}{\partial z_-}\right)_- \; -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ \frac{2(\sin\psi' - u_0 \sin\psi_0)}{1 - u_0^2} + \sin\psi_0 \log \frac{1 - u_0}{1 + u_0} \right\} \cos^2\psi_0 \, d\vartheta . \end{cases}$$

Remarque I. Le changement de la dérivée, lorsque le point P traverse la surface, est toujours fini, même dans le cas où la quantité W'_s est infinie, c.-à-d. où les limites de la dérivée n'existent pas, pourvu qu'on definisse le premier membre de l'égalité (255) par le second membre de l'égalité (202). Le second membre de l'égalité (255) restera le même, si on fait $h' = h$. En outre il faut ajouter le terme (cfr. 222, 221)

$$c\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\beta'_{20}\cos^2\psi'_0\, d\vartheta, \quad c = \lim \frac{h'}{h}.$$

Dans le cas où le point P se trouve dans la surface et qu'on change la direction de ds, on obtiendra un résultat analogue.

Remarque II. Si la surface admet au point P_0 un plan tangent bien déterminé, ψ'_0 est $= 0$, et on retrouvera les formules (199) pour le cas d'une couche plane.

Cas particulier: *Point conique.* Supposons que l'angle ψ'_0 est constant > 0, et que la fonction σ est continue au point P_0. Nous trouverons (208)

$$Q_s = -2\pi\sigma_0\cos^2\psi'_0 \Big\{ (\sin\psi' - \sin\psi'_0) + 2\sin\psi'\sin\psi'_0 +$$
$$+ \sin\psi'\sin\psi'_0 \log\left[\frac{(\sin\psi' - \sin\psi'_0) + 1 - \sin\psi'\sin\psi'_0}{2}\cos\psi'_0\right]\Big\}.$$

Nous définissons

$$\frac{\partial V}{\partial s_+} + \frac{\partial V}{\partial s_-} = \lim_{h=0}\left[\frac{1}{h}(V_{h+} - V) + \frac{1}{h}(V_{h-} - V)\right],$$

les potentiels V_{h+} et V_{h-} étant rapportés aux points P'_+ et P'_- situés sur la même droite $P'_+P_0P'_-$ à la même distance h du point P_0. Donc nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial s_+} + \frac{\partial V}{\partial s_-} = -2\pi\sigma_0\sin\psi'\cos^2\psi'_0\left\{2 + \sin\psi'_0\log\frac{1-\sin\psi'_0}{1+\sin\psi'_0}\right\}, \text{ si } \psi' > \psi'_0, \text{ mais}$$
$$= -2\pi\sigma_0\sin\psi'_0\cos^2\psi'_0\left\{2 + \sin\psi'\log\frac{1-\sin\psi'}{1+\sin\psi'}\right\}, \text{ si } 0 \leq \psi' < \psi'_0.$$

De plus nous trouverons (222) pour $\omega' = 0$, c.-à-d. en prenant l'axe des y perpendiculaire à la droite P_0PP_1,

$$Q'_s = \lambda Q'_x + \mu Q'_y + \nu Q'_z$$

$$Q'_x = 2\pi\sigma_0\sin\psi'_0\cos^2\psi'_0\frac{1-\sin\psi'}{\cos\psi'} \text{ pour } \psi' > \psi'_0, \text{ et}$$

$$= -2\pi\sigma_0 \sin\psi'_0 \cos^2\psi'_0 \frac{1+\sin\psi'}{\cos\psi'} \quad \text{pour } \psi' < \psi'_0$$

$$Q'_y = 0$$

$$Q'_z = -2\pi\sigma_0 \cos^2\psi'_0 \left\{1 + 2\sin\psi'_0 + \sin\psi'_0 \log\frac{(1+\sin\psi')(1-\sin\psi'_0)\cos\psi'_0}{2}\right\} \text{ pour } \psi' > \psi'_0,$$

et

$$= -2\pi\sigma_0 \cos^2\psi'_0 \left\{-1 + 2\sin\psi'_0 + \sin\psi'_0 \log\frac{(1-\sin\psi')(1+\sin\psi'_0)\cos\psi'_0}{2}\right\} \text{ pour } \psi' < \psi'_0.$$

D'où l'on tire

$$(256^*) \quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0}\left[\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial x}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial V_h}{\partial x}\right)_-\right] = 4\pi\sigma_0 \sin\psi'_0 \cos^2\psi'_0 \dfrac{1-\sin\psi'}{\cos\psi'} \quad \text{pour } \psi' > \psi'_0, \text{ mais} \\ \qquad\qquad = -4\pi\sigma_0 \sin\psi'_0 \cos^2\psi'_0 \operatorname{tg}\psi' \quad \text{pour } 0 \leq \psi' < \psi'_0 \\ \lim\limits_{h=0}\left[\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial y}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial V_h}{\partial y}\right)_-\right] = 0 \\ \lim\limits_{h=0}\left[\left(\dfrac{\partial V_h}{\partial z}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial V_h}{\partial z}\right)_-\right] = -2\pi\sigma_0 \cos^2\psi'_0 \left\{2 + \sin\psi'_0 \log\dfrac{1-\sin\psi'_0}{1+\sin\psi'_0}\right\} \quad \text{pour } \psi' > \psi'_0, \text{ mais} \\ \qquad\qquad = -2\pi\sigma_0 \sin\psi'_0 \cos^2\psi'_0 \log\dfrac{1-\sin\psi'}{1+\sin\psi'} \quad \text{pour} \\ 0 \leq \psi' < \psi'_0. \end{cases}$$

CHAPITRE IV.

Les dérivées secondes du potentiel d'une simple couche. Surface plane.

§ **38.** *Les dérivées suivant la surface en un point de la couche.* Considérons une partie circulaire de la couche, supposée plane, dont le centre se trouve au point P_0 et dont le rayon est a. Prenons le point P_0 pour origine d'un système d'axes de coordonnées, dont l'axe des z est dirigé suivant la normale du plan au point P_0. Soit P un point situé sur l'axe des x à la distance k de l'origine. Nous traiterons séparément les cas $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial s}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$, où l'élément ds est pris dans une direction quelconque.

1°. $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. La dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ au point P_0 peut être définie par la formule

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{k=0} \frac{1}{k}\left[\frac{\partial V}{\partial x} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0\right],$$

où $\frac{\partial V}{\partial x}$ se rapporte au point P et $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0$ au point P_0. Nous avons trouvé (128), en posant $\omega = 0$,

$$
(128^*) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = T_x + M_x \\
&T_x = \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta \, d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} \\
&M_x = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[1 + \cos \vartheta + \cos \vartheta \log \frac{1 - \cos \vartheta}{2} \right] d\vartheta, \text{ où} \\
&\sigma_0(\vartheta) = \lim_{r=0} \sigma(r, \vartheta).
\end{aligned}
\right.
$$

Si la quantité T_x est finie, on aura

$$
(130^*) \qquad \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \cos \vartheta \, d\vartheta = 0 .
$$

Pour la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ au point P nous pourrons écrire (128, 139, 176, 177)

$$
(257) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial x} = U_x + M_x^U \\
&U_x = I_1 + I_2 + \lim_{\alpha=0} (I_3 + I_4) + \lim_{\alpha=0} I_5 \\
&I_1 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{1-\alpha} o_x \, ds \\
&I_2 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\alpha}^{a} o_x \, ds \\
&I_3 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1-\alpha}^{1-\sigma} o_x \, ds \\
&I_4 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\alpha}^{1+\alpha} o_x \, ds
\end{aligned}
\right.
$$

(257)
$$\left\{\begin{aligned}
&I_5=\int_{1-\alpha}^{1+\alpha} ds\int_{\vartheta_1}^{2\pi-\vartheta_1} o_x d\vartheta,\ \alpha^2=s^2-2s\cos\vartheta_1+1,\\
&o_x=\sigma(ks,\vartheta)(su-1)\frac{s}{p^3}\\
&p=\sqrt{s^2-2su+1}\\
&u=\cos\vartheta\\
&M_x^{(k)}=-\int_0^{2\pi}\sigma_k(\bar\vartheta)\left[1+\cos\bar\vartheta+\cos\bar\vartheta\log\frac{1-\cos\bar\vartheta}{2}\right]d\bar\vartheta\\
&\sigma_k(\bar\vartheta)=\lim_{R=0}\sigma^{(k)}(R,\bar\vartheta)\\
&\sigma^{(k)}(R,\vartheta)=\sigma(r,\vartheta)\\
&R=PQ=\sqrt{r^2-2rku+k^2}\\
&r=ks,
\end{aligned}\right.$$

où $\bar\vartheta$ est l'angle que fait la direction PQ avec l'axe des x. La dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ est finie, si la quantité

(180*)
$$\left\{\begin{aligned}
&H_x=\lim_{\alpha=0} H_{x\alpha}\ \text{est finie, où}\\
&H_{x\alpha}=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon'} d\vartheta\int_{\alpha}^{\chi}[\sigma(k+k\tau,\vartheta)-\sigma(k-k\tau,\vartheta)\frac{\tau d\tau}{[\tau^2+\vartheta^2]^{3/2}}.
\end{aligned}\right.$$

Nous faisons pour la fonction $\sigma(r,\vartheta)$ l'hypothèse suivante:

(258)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sigma(r,\vartheta)=\sigma_0(\vartheta)+r\bar\sigma(r,\vartheta),\\
&\lim_{r=0}\sigma(r,\vartheta)=\text{une quantité finie } \bar\sigma_0(\vartheta).
\end{aligned}\right.$$

Nous pourrons écrire

$$V=V^\circ+V,$$

où V° se rapporte à σ_0 et $\bar V$ à $r\bar\sigma$.

En ayant égard à l'égalité (130*) nous trouverons

$$T_x=\int_0^{2\pi}\cos\vartheta d\vartheta\int_0^{\alpha}\bar\sigma(r,\vartheta)dr.$$

Posons

$$\Gamma_x = \int (su - 1)\frac{s\,ds}{p^3} = u\log(p + s - u) + \frac{1 - 2su}{p}$$

$$\bar{\Gamma}_x = \int (su - 1)\frac{s^2 ds}{p^3} = u\,p + (3u^2 - 1)\log(p + s - u) + \frac{(1 - 4u^2)s + 2u}{p}.$$

Soient p_- et p_+ ce que deviendra p, lorsqu'on y substitue à s successivement $1 - \alpha$ et $1 + \alpha$. Nous trouverons (cfr. équ. 73, 74)

$$\lim_{\alpha=0} \alpha \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p_+}\right) d\vartheta = 0$$

$$\lim_{\alpha=0} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{p_-} - \frac{1}{p_+}\right) d\vartheta = 0$$

$$\lim_{\alpha=0} \int_0^{2\pi} \log \frac{p_- + 1 - \alpha - \cos\vartheta}{p_+ + 1 + \alpha - \cos\vartheta}\, d\vartheta = 0\,.$$

Soit F une fonction toujours numériquement plus petite qu'une quantité finie, donc

$$\lim_{\alpha=0} \int_0^{2\pi} F \Big/_{1+\alpha}^{1-\alpha} \Gamma_x\, d\vartheta = 0$$

$$\lim_{\alpha=0} \int_0^{2\pi} F \Big/_{1+\alpha}^{1-\alpha} \bar{\Gamma}_x\, d\vartheta = 0\,.$$

Nous chercherons les valeurs de $\frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2}$ et de $\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2}$ séparément.

Premier cas. $\frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2}$. La fonction $\sigma_0(\vartheta)$ étant indépendante de r, nous aurons (180*) $H_x = 0$, et nous aurons aussi $T_x = 0$,

$$\therefore \left(\frac{\partial V^0}{\partial x}\right)_0 = M_{,}\,.$$

De plus nous aurons

$$U_x = \lim_{\alpha=0}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left(\int_0^{1-\alpha}\Gamma_x + \int_{1+\alpha}^{\frac{a}{k}}\Gamma_x\right)d\vartheta + \lim_{\alpha=0} I_5 = \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\int_0^{\frac{a}{k}}\Gamma_x d\vartheta + \lim_{\alpha=0} I_5 =$$

$$=\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left\{u\left(\log\frac{2a}{k}-2\right)-[1+u\log(1-u)]+\frac{k}{a}(1-3u^2)+k^2 b\right\}d\vartheta+\lim_{\alpha=0} I_5,$$

$\lim_{k=0} b$ finie,

$$\therefore\; U_x = M_x + \frac{k}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(1-3u^2)\,d\vartheta + k^2\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)b\,d\vartheta + \lim_{\alpha=0} I_5,$$

$$\therefore\; \frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2} = \lim_{k=0}\frac{1}{k}\left[\frac{\partial V^0}{\partial x} - \left(\frac{\partial V^0}{\partial x}\right)_0\right] = -\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3u^2-1)\,d\vartheta + \lim_{k=0}\frac{1}{k}[M_x^{(k)} + \lim_{\alpha=0} I_5].$$

Si nous supposons que la fonction $\sigma_0(\vartheta)$ a une valeur limite unique pour $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, et que cela aura lieu aussi pour $\pi \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, mais que les deux valeurs limites des deux côtés de l'axe des x peuvent être différentes, donc l'égalité (177) aura lieu. De plus, $\sigma_k(\vartheta)$ (257) étant, dans ce cas, une constante de chaque côté de l'axe des x, on trouvera $M_x^{(k)} = 0$,

(259) $$\therefore\; \frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2} = -\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3u^2-1)\,d\vartheta.$$

Deuxième cas: $\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2}$. La fonction σ_0 étant $=0$, nous aurons $M_x = 0$

$$\therefore\; \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x}\right)_0 = T_x.$$

Supposons qu'au point P la fonction $\bar{\sigma}(r, \vartheta)$ soit continue et qu'elle y ait une valeur limite unique pour $0 \leqq \bar{\vartheta} \leqq \pi$ et pour $\pi \leqq \bar{\vartheta} \leqq 2\pi$ resp., lorsque R tend vers zéro,

$$\therefore\; \lim_{\alpha=0} I_5 = 0\,, \quad M_x^{(k)} = 0.$$

De plus nous trouverons

$$U_x = k[\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \lim_{\alpha=0}(\bar{I}_3 + \bar{I}_4)],$$

où $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ etc. sont ce que deviendront les intégrales I_1, I_2, etc., lorsqu'on y remplace $\sigma(ks, \vartheta)$ par $\bar{\sigma}(ks, \vartheta)$ et $\frac{sds}{p^3}$ par $\frac{s^2ds}{p^3}$.

Soit $\bar{H}_{x\alpha}$ ce que deviendra $H_{x\alpha}$, lorsqu'on y remplace σ par $\bar{\sigma}$. Donc nous trouverons

$$H_{x\alpha} = k\bar{H}_{x\alpha} + k\eta_{x\alpha},$$

$$\lim_{\alpha=0} \eta_{x\alpha} \text{ finie et } \lim_{k=0} (\lim_{\alpha=0} \eta_{x\alpha}) \text{ finie.}$$

D'où il suit que si la quantité H_x est finie, la quantité

$$\bar{H}_x = \lim_{\alpha=0} \bar{H}_{x\alpha}$$

est aussi finie et réciproquement. Nous avons trouvé (§ 27) que si $\lim_{k=0} H_x = 0$, la dérivée $\frac{\partial V}{\partial x}$ est continue à l'origine, si elle y est finie. Supposons maintenant

$$\lim_{k=0} \bar{H}_x = 0. \tag{260}$$

Comme dans le § 27 nous trouverons

$$\lim_{k=0} [\lim_{\alpha=0} (\bar{I}_3 + \bar{I}_4)] = \lim_{\alpha=0} (\bar{I}_3^\circ + \bar{I}_4^\circ),$$

où $\bar{I}_3^\circ$ et $\bar{I}_4^\circ$ sont ce que deviendront $\bar{I}_3$ et $\bar{I}_4$, lorsqu'on y remplace $\bar{\sigma}$ par $\bar{\sigma}_0$. Nous pourrons donc écrire, en posant $\lim_{k=0} \bar{I}_1 = \bar{I}_1^\circ$,

$$\frac{1}{k}\left[\frac{\partial V}{\partial x} - \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0\right] = \bar{I}_1^\circ + \bar{I}_2 + \lim_{\alpha=0} (\bar{I}_3^\circ + \bar{I}_4^\circ) - \frac{1}{k} T_x + \varepsilon, \lim_{k=0} \varepsilon = 0, \quad \text{où}$$

$$\bar{I}_1^\circ = \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta) \int_0^{1-\alpha} \bar{\Gamma}_x(s,u) d\vartheta$$

$$\bar{I}_3^\circ = \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta) \int_{1-\alpha}^{1-\alpha} \bar{\Gamma}_x(s,u) d\vartheta$$

$$\bar{I}_4^\circ = \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta) \int_{1+\alpha}^{1+\alpha} \bar{\Gamma}_x(s,u) d\vartheta$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \bar{\sigma}(ks, \vartheta)(su - 1) s^2 \frac{ds}{p^3}.$$

Or, on a

$$(su - 1)\frac{s^2}{p^3} = u + (3u^2 - 1)\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} P, \lim_{s=\infty} P \text{ finie},$$

par suite nous écrivons

$$I_2 = I' + I''$$

$$I' = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \bar{\sigma}(ks, \vartheta)\left[\frac{s^3 u - s^2}{p^3} - u - \frac{3u^2 - 1}{s}\right] ds$$

$$I'' = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1+\varkappa}^{\frac{a}{k}} \bar{\sigma}(ks, \vartheta)\left[u + \frac{3u^2 - 1}{s}\right] ds,$$

et nous trouverons

$$\lim_{k=0} I' = \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta) \int_{1+\varkappa}^{\infty} [\bar{\Gamma}_x(s, u) - su - (3u^2 - 1)\log s]\, d\vartheta$$

$$I'' = \frac{1}{k} T_x + \int_0^{2\pi} (3u^2 - 1)\, d\vartheta \int_{(1+\varkappa)k}^{a} \bar{\sigma}(r, \vartheta)\frac{dr}{r} - \int_0^{2\pi} u\, d\vartheta \int_0^{1+\varkappa} \bar{\sigma}(ks, \vartheta)\, ds.$$

En passant à la limite nous aurons

$$(261) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} = \bar{W}_{xx} + \bar{S}_{xx} \\ \bar{W}_{xx} = \lim\limits_{k=0} W_{xx}^{(k)} \\ W_{xx}^{(k)} = \displaystyle\int_0^{2\pi} (3u^2 - 1)\, d\vartheta \int_k^{a} \bar{\sigma}(r, \vartheta)\frac{dr}{r} \\ \bar{S}_{xx} = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)\left[5u^2 + 3u - 1 + (3u^2 - 1)\log\frac{1-u}{2}\right] d\vartheta \\ u = \cos\vartheta. \end{cases}$$

Dans le cas général, nous supposerons que la fonction σ est de la forme (258), et nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la fonction $\sigma(r, \vartheta)$ est de la forme*

$$\sigma(r, \vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + r\sigma(r, \vartheta), \ \lim_{r=0} \sigma(r, \vartheta) \ \textit{finie},$$

et si à chaque point de l'axe des x dans le voisinage du point P_0 les fonctions $\sigma_0(\vartheta)$ et $\bar{\sigma}(r, \vartheta)$ représentent chacune une valeur limite unique de chaque côté de cet axe, la valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ au point P_0 est donnée par la formule

(262)
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2},$$

où les valeurs de $\frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2}$ sont données par les égalités (259) *et* (261), *pourvu que l'égalité* (260) *soit satisfaite. Si la quantité T_x* (128*) *existe, il faut donc et il suffit pour l'existence de la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ que la quantité W_{xx}* (261) *existe.*

Remarque. La quantité $W_{xx}^{(\,)}$ peut s'écrire

(263)
$$W_{xx}^{(k)} = \int_k^{\omega} (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} d\omega.$$

Cas particuliers. 1°. Si $\sigma_0(\vartheta) =$ une constante σ_1 pour $0 \leq \vartheta \leq \pi$, et
$= \quad » \quad » \quad \sigma_2 \quad » \quad \pi \leq \vartheta \leq 2\pi$,

nous trouverons que l'égalité (130*) est satisfaite et que

(264)
$$\frac{\partial^2 V^0}{\partial x^2} = -\frac{\pi}{2a}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

2°. Si $\sigma_0(\vartheta)$ est — une constante, l'équation

(265)
$$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3\cos^2 \vartheta - 1)\, d\vartheta = 0$$

n'est pas satisfaite, par suite la quantité W_{xx} ne peut pas être finie et déterminée

3°. Soit

(266)
$$\sigma_0(\vartheta) = a' \cos \vartheta + b' \sin \vartheta,$$

où a' et b' sont des constantes. Dans ce cas, l'équation (265) est satisfaite, et nous trouverons

(267) $$S_{xx} = 0.$$

2° $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$. La dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$ au point P_0 peut être définie par la formule

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = \lim_{k=0} \left[\frac{\partial V}{\partial y} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0\right],$$

où $\frac{\partial V}{\partial y}$ se rapporte au point P et $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0$ au point P_0. Nous trouverons (128), en posant $\omega = \frac{\pi}{2}$.

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = T_y + M_y$$

$$T_y = \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta\, d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r}$$

$$M_y = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[1 + \sin\vartheta + \sin\vartheta \log \frac{1 - \sin\vartheta}{2}\right] d\vartheta.$$

Pour la dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$ au point P, nous retrouverons les formules (257) en y remplaçant o_x par o_y, où (175)

(257*) $$o_y = \sigma(ks, \vartheta) \frac{s^2 \sin\vartheta}{p^3}.$$

La dérivée $\frac{\partial V}{\partial y}$ est finie, si la quantité

(187*) $$\begin{cases} H_y = \lim\limits_{\alpha=0} H_{y\alpha} \text{ est finie, où} \\ H_{y\alpha} = \int_0^{\varepsilon} \vartheta\, d\vartheta \int_{\alpha}^{\chi} [\sigma_2(k + k\tau, \vartheta) + \sigma_2(k - k\tau, \vartheta)] \frac{d\tau}{(\tau^2 + \vartheta^2)^{3/2}} \\ \sigma_2(r, \vartheta) = \sigma(r, \vartheta) - \sigma(r, 2\pi - \vartheta). \end{cases}$$

Nous faisons sur la fonction $\sigma(r, \vartheta)$ les mêmes hypothèses (258) que dans le cas précédent, et nous chercherons les valeurs de $\frac{\partial^2 V^0}{\partial x \partial y}$ et de $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$.

Premier cas: $\dfrac{\partial^2 V^0}{\partial x\,\partial y}$. Posons

$$\sigma_2(\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) - \sigma_0(-\vartheta).$$

Nous trouverons (187)

$$H_{yz} = 2\int_0^{\varepsilon} \sigma_2(\vartheta)\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+\vartheta^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\vartheta^2}}\right]\frac{d\vartheta}{\vartheta} =$$

$$= 2\int_0^{\eta} \sigma_2(\vartheta)\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+\vartheta^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\vartheta^2}}\right]\frac{d\vartheta}{\vartheta} + 2\int_{\eta}^{\varepsilon} \sigma_2(\vartheta)\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+\vartheta^2}} - 1\right]\frac{d\vartheta}{\vartheta} -$$

$$2\int_{\eta}^{\varepsilon} \sigma_2(\vartheta)\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\vartheta^2}}\,d\vartheta + 2\int_{\eta}^{\varepsilon} \sigma_2(\vartheta)\frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

La limite pour $\alpha = 0$ de la première intégrale du dernier membre est

$$-2\sigma_2(0)\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

La limite pour $\alpha = 0$ de la seconde intégrale peut s'écrire

$$-2\sigma'_2\log\frac{\sqrt{z^2+\varepsilon^2}+z}{2z}.$$

où σ'_2 est une valeur moyenne de σ_2; elle est toujours finie. En posant $\vartheta = \alpha\varphi$, nous trouverons que la limite pour $\alpha = 0$ de la troisième intégrale est

$$2\sigma_2(0)\log(\sqrt{2}+1).$$

$$\therefore\ H_y = 2\sigma_2(0)\log\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right) - 2\sigma'_2\log\frac{\sqrt{z^2+\varepsilon^2}+z}{2z} + 2\lim_{\eta=0}\int_{\eta}^{\varepsilon}\sigma_2(\vartheta)\frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

Donc la condition, pour que la quantité H_y soit finie, est

(268) que $$\lim_{\eta=0}\int_{\eta}^{\varepsilon}\sigma_2(\vartheta)\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \text{une quantité finie.}$$

La fonction $\sigma_2(\vartheta)$ étant indépendante de r, on aura

$$\lim_{k=0} H_y = H_y^\circ . \tag{194*}$$

Pour que la quantité T_y soit finie, il faut que

$$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta = 0, \quad \therefore \quad T_y = 0. \tag{130**}$$

De plus, nous trouverons $\lim_{\alpha=0} I_5 = 0$. Soit

$$\Gamma_y = \int \frac{s^2 ds}{p^3} = \log(p + s - u) + \frac{(2u^2 - 1)s - u}{(1 - u^2)p},$$

$$\therefore \sin\vartheta \Big|_{1+\alpha}^{1-\alpha} \Gamma_y = -\frac{\alpha}{\sin\vartheta}\left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{p_+}\right) + \zeta_\alpha, \ \lim_{\alpha=0} \zeta_\alpha = 0 \text{ pour } \vartheta = 0.$$

On peut remplacer p_- et p_+ par $\sqrt{\alpha^2 + \vartheta^2}$, et on trouvera, en posant $\vartheta = \alpha\varphi$,

$$\int_0^\varepsilon \sigma_2 \frac{\alpha d\vartheta}{\vartheta\sqrt{\alpha^2 + \vartheta^2}} = \int_0^\alpha \sigma_2 \frac{d\vartheta}{\vartheta} + \int_0^1 \sigma_2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}} - 1\right] \frac{d\varphi}{\varphi} +$$

$$+ \int_1^{\frac{\varepsilon}{\alpha}} \sigma_2 \frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{1 + \varphi^2}} = \int_0^\varphi \sigma_2(\vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta} + \sigma_2(0) \log 2 + \zeta', \ \lim_{\alpha=0} \zeta' = 0.$$

De plus, on aura

$$\Big|_0^{\frac{a}{k}} \Gamma_y = \log\frac{a}{k} - \log\frac{1 - \cos\vartheta}{2} - 2 + \frac{1}{1 - \cos\vartheta} - \frac{3k}{a}\cos\vartheta + k\eta, \ \lim_{k=0} \eta = 0$$

$$M_y^{(k)} = 2\sigma_2(0)\log 2.$$

$$\therefore \frac{1}{k}\left[\frac{\partial V^0}{\partial y} - \left(\frac{\partial V^0}{\partial y}\right)_0\right] = \frac{1}{k} Q - \frac{3}{a}\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta + \eta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[1 + \sin\vartheta \log\frac{1 - \sin\vartheta}{1 - \cos\vartheta}\right] d\vartheta + \lim_{\alpha=0} \int_\alpha^\pi \sigma_2(\vartheta) \frac{\sin\vartheta d\vartheta}{1 - \cos\vartheta}. \tag{269}$$

Pour que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}$ existe, il faut donc que l'on ait $Q = 0$. Si cette condition est satisfaite, on trouvera

$$\frac{\partial^2 V^0}{\partial x\, \partial y} = -\frac{3}{a}\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta\,. \tag{270}$$

Deuxième cas: $\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}$. La fonction $\sigma_0(\vartheta)$ étant $= 0$, nous trouverons

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = T_y = \int_0^{2\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{a} \bar{\sigma}(r, \vartheta)\, dr\,.$$

Soit $H_{y\alpha}$ ce que deviendra $H_{y\alpha}$, lorsqu'on y remplace σ par σ. Donc nous trouverons

$$H_{y\alpha} = k H_{y\alpha} + k \eta_{y\alpha}, \quad \lim_{\alpha = 0} \eta_{y\alpha} \text{ finie pour } k \geqq 0, \text{ et } = 0 \text{ pour } k = 0.$$

Supposons que

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\alpha=0} \bar{H}_{y\alpha} = H_y \text{ soit finie et} \\ \lim\limits_{k=0} H_y = \bar{H}_y^{\circ}, \end{array}\right. \tag{271}$$

où $\bar{H}_y^{\circ}$ est la valeur de H_y pour $k = 0$. Comme dans le premier cas nous trouverons que la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité H_y° soit finie, est:

$$\text{(272) que} \quad \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{a=0} \int_{\alpha}^{\varepsilon} \sigma_2(\vartheta) \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \text{une quantité finie, où} \\ \sigma_2(\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) - \sigma_0(2\pi - \vartheta)\,. \end{array}\right.$$

Posons

$$\bar{\Gamma}_y = \int \frac{s^3 ds}{p^3} = p + 3u \log(p + s - u) + \frac{(4u^2 - 3)\, su + 1 - 2u^2}{(1 - u^2)\, p}\,.$$

Si les égalités (271) et (272) sont satisfaites, nous trouverons comme dans le premier cas

$$\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial y} = \int_0^\pi \bar{\sigma}_2(\vartheta)\left[\Big|_0^{\frac{k}{a}} \bar{T}_y - \Big|_0^{\frac{k}{a}} s - \Big|_1^{\frac{k}{a}}\left(3u\log s - \frac{1}{1-u}\right)\right]\sin\vartheta\, d\vartheta + \lim_{\eta=0}\int_\eta^\pi \bar{\sigma}_2(\vartheta)\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{1-u} + \frac{1}{k}\, T_y +$$

$$+ \lim_{k=0} 3\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\int_k^a \bar{\sigma}(r,\vartheta)\frac{dr}{r}.$$

D'où l'on tire

$$(273)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = W_{xy} + S_{xy} \\ \bar{W}_{xy} = \lim\limits_{k=0} W_{xy}^{(k)} \\ W_{xy}^{(k)} = 3\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\int_k^a \sigma(r,\vartheta)\frac{dr}{r} \\ \bar{S}_{xy} = \displaystyle\int_0^\pi \sigma_2(\vartheta)\left[\frac{1}{1-\cos\vartheta} - 3 - 5\cos\vartheta - 3\cos\vartheta\log\frac{1-\cos\vartheta}{2}\right]\sin\vartheta\, d\vartheta. \end{cases}$$

Dans le cas général, nous supposerons que la fonction σ est de la forme (258), et nous pourrons énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la fonction $\sigma(r,\vartheta)$ est de la forme*

$$\sigma(r,\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + r\sigma(r,\vartheta),\quad \lim_{r=0}\sigma(r,\vartheta)\ \textit{finie},$$

et si à chaque point de l'axe des x dans le voisinage du point P_0 les fonctions $\sigma_0(\vartheta)$ et $\sigma(r,\vartheta)$ ont chacune une valeur limite unique de chaque côté de cet axe, la valeur de $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ au point P est donnée par la formule

$$(274)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V^0}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y},$$

*où les valeurs de $\dfrac{\partial^2 V^0}{\partial x\,\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ sont données par les égalités (270) et (273), pourvu que les conditions (130**), (268), (269), (271) et (272) soient satisfaites. Pour l'existence de la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ au point P_0, il faut donc de plus et il suffit que la quantité W_{xy} existe.*

Remarque I. La quantité $\overline{W}_{xy}^{(k)}$ peut s'écrire

$$(275) \qquad \overline{W}_{xy}^{(k)} = \int\limits_{(k)}^{(a)} (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \, \partial y} \, d\omega .$$

Remarque II. La dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial x}$ n'est pas en général égale à la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y}$, car la quantité correspondante $\overline{S}_{yx}$ n'est pas nécessairement égale à $\overline{S}_{xy}$. En effet, S_{yx} est ce que deviendra $-S_{xy}$ en y substituant à la fonction $\sigma_2(\vartheta)$ la fonction $\overline{\sigma}_2 \left(\dfrac{\pi}{2} + \vartheta\right)$.

Cas particuliers. 1°. Si $\sigma_0(\vartheta)$ est une constante, les égalités (130**) et (269) sont satisfaites, et nous trouverons

$$S_{xy} = 0 .$$

2°. Si $\sigma_0(\vartheta)$ est une constante, nous trouverons

$$S_{xy} = 0 .$$

3°. Soit

$$(266) \qquad \overline{\sigma}_0(\vartheta) = a' \cos \vartheta + b' \sin \vartheta , \; \sigma(r, \vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + \sigma_1(r, \vartheta), \; \lim_{r=0} \sigma_1(r, \vartheta) = 0 ,$$

$$\therefore \; \overline{W}_{xy}^{(k)} = 3 \int\limits_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \int\limits_k^a \sigma_1(r, \vartheta) \frac{dr}{r}$$

$$S_{xy} = 0 ,$$

pourvu que les conditions (271) soient satisfaites.

3° $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial s}$. Soient λ', μ', ν' les cosinus directeurs de l'élément ds émanant du point P, qui est situé sur l'axe des x à la distance k de l'origine P_0. Soient de plus ψ' l'angle que fait cet élément avec le plan des xy, et ω' l'angle que fait sa projection dans ce plan avec l'axe des x. Nous trouverons (cfr. équ. 131, 173).

$$(276) \quad \left\{ \begin{aligned} & \lambda' = \cos \psi' \cos \omega', \quad \mu' = \cos \psi' \sin \omega', \quad \nu' = \sin \psi' \\ & \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_0 = T' + M' \\ & T' = \int\limits_0^{2\pi} \mu' d\vartheta \int\limits_0^a \overline{\sigma}(r_1 \vartheta) dr = \lambda' T_x + \mu' T_y \end{aligned} \right.$$

(276)
$$\left\{\begin{aligned}
&M' = -\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left[1 + u' + u'\log\frac{1-u'}{2}\right]d\vartheta\\
&u' = \lambda'\cos\vartheta + \mu'\sin\vartheta = \cos\psi'\cos(\vartheta-\omega')\\
&\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)u'd\vartheta = 0.\\
&\frac{\partial V}{\partial s} = U_s + M'_k\\
&U_s = \lambda' U_x + \mu' U_y\\
&M'_k = -\pi[\sigma(k,o)_+ + \sigma(k,o)_-]\sin\psi' + 2[\sigma(k,o)_+ - \sigma(k,o)_-]\sin\psi\,\mathrm{tg}^{-1}[\cot\psi'\sin\omega'],
\end{aligned}\right.$$

(277)
$$\left\{\begin{aligned}
&\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial s} = \overline{W}_{xs} + \overline{S}_{xs} - \frac{\lambda'}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3\cos^2\vartheta - 1)\,d\vartheta - \frac{3\mu'}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta -\\
&\qquad - \pi\lim_{k=0}[\bar\sigma(k,o)_+ + \bar\sigma(k,o)_-]\sin\psi\\
&\overline{W}_{xs} = \lim_{k=0}\overline{W}_{xs}^{(k)}\\
&\overline{W}_{xs}^{(k)} = \lambda'\overline{W}_{xx}^{(k)} + \mu'\overline{W}_{xy}^{(k)}\\
&\overline{S}_{xs} = \lambda' S_{xx} + \mu' S_{xy}.
\end{aligned}\right.$$

Les conditions qui doivent être satisfaites sont

(278)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sigma(r,\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + r\,\sigma(r,\vartheta)\\
&\bar\sigma_0(\vartheta) = \lim_{r=0}\sigma(r,\vartheta) = \text{une quantité finie}\\
&\lim_{\vartheta=0}\sigma(r,\vartheta) = \text{une valeur unique de chaque côté de l'axe des } x.\\
&\lim_{\alpha=0}\int_\alpha^\varepsilon\sigma_2(\vartheta)\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \text{une quantité finie, } \sigma_2(\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) - \sigma_0(2\pi-\vartheta)\\
&H_s \equiv \lim_{\alpha=0}H_{s\alpha} = \text{une quantité finie, où}\\
&\overline{H}_{s\alpha} = \lambda' H_{x\alpha} + \mu'\overline{H}_{y\alpha},\\
&\lim_{k=0}H_s = H_s^\circ\text{, où}\\
&H_s^\circ \text{ est la valeur de } H_s \text{ pour } k=0\\
&\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)u'd\vartheta = 0.
\end{aligned}\right.$$

De plus il faut que l'on ait

$$\lambda' \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[\left(\log \frac{2a}{k} - 2 \right) \cos \vartheta - \cos \vartheta \log (1 - \cos \vartheta) - 1 \right] d\vartheta +$$

$$+ \mu' \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[\log \frac{2a}{k} - 2 - \log (1 - \cos \vartheta) \right] \sin \vartheta d\vartheta + \lim_{\alpha=0} \mu' \int_\alpha^{\pi} \sigma_2(\vartheta) \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{1 - \cos \vartheta} -$$

$$- 2 \mu' \sigma_2(0) \log 2 + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[1 + \nu' + \nu' \log \frac{1 - \nu'}{2} \right] d\vartheta + \lim_{k=0} M'_k = 0.$$

∴ en observant que (211)

$$\mu' \sigma_2(k, 0) = 0 \text{ et que } \sigma_2(\vartheta) = \lim_{k=0} \sigma_2(k, \vartheta),$$

(279) $$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left[1 + \lambda' + \nu' \log \frac{1 - \nu'}{1 - \cos \vartheta} \right] d\vartheta + \lim_{\alpha=0} \mu' \int_\alpha^{\pi} \sigma_2(\vartheta) \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{1 - \cos \vartheta} = \pi(\sigma_+ + \sigma_-) \sin \nu' \\ \sigma_+ = \lim_{\vartheta=0} \sigma_0(\vartheta) \text{ pour } \vartheta > 0, \quad \sigma_- = \lim_{\vartheta=2\pi} \sigma_0(\vartheta) \text{ pour } \vartheta < 2\pi. \end{cases}$$

Cas particulier. Si $\sigma_0(\vartheta)$ est une constante, nous trouverons

$$\frac{\partial^2 V^0}{\partial x \partial s} = \frac{\pi \lambda' \sigma_0}{a}.$$

4° $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$. Pour la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$, nous trouverons l'expression

(280) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = - \lim_{k=0} \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_k(\vartheta) d\vartheta,$$

où $\sigma_k(\vartheta) = \lim_{R=0} \sigma_k(R, \vartheta)$, $\sigma_k(R, \vartheta)$ étant $= \sigma(r, \vartheta)$. La seule condition à satisfaire est

(279*) $$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) d\vartheta = \pi(\sigma_+ + \sigma_-).$$

§ 39. *La dérivée extérieure en un point de la couche.* Soit maintenant le point P situé au-dessus du plan, et soient $\lambda \mu \nu$ les cosinus directeurs de l'élément ds. Si la fonction σ est de la forme (258), nous trouverons pour le point P_0 (131)

$$
(131^*)\quad
\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial V}{\partial s}\right)_0 = T' + M' \\[2ex]
T' = \displaystyle\int_0^{2\pi} u\, d\vartheta \int_0^a \bar{\sigma}(r, \vartheta)\, dr \\[2ex]
M' = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[1 + u + u \log \frac{1-u}{2}\right] d\vartheta \\[2ex]
u = \cos(P_0 Q, ds) = \lambda \cos\vartheta + \mu \sin\vartheta \\[2ex]
\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, u\, d\vartheta \text{ étant supposée} = 0.
\end{cases}
$$

Si $\lambda' \mu' \nu'$ sont les cosinus directeurs de la droite $P_0 P = h$, les égalités (138) donnent

$$
(138^*)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial V_h}{\partial s} = U_h + N_h \\[2ex]
U_h = \displaystyle\int_0^{2\pi} u\, d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r, \vartheta)\, dr = T' - h \int_0^{2\pi} u\, d\vartheta \int_0^1 \bar{\sigma}(ht, \vartheta)\, dt \\[2ex]
N_h = N_h^0 + h \overline{N}_h \\[2ex]
N_h^0 = c \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \frac{t\, dt}{q^3} - \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, u\, d\vartheta \int_0^1 \frac{t^2\, dt}{q^3} + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, u\, d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \left(\frac{t^2}{q^3} - \frac{1}{t}\right) dt \\[2ex]
\overline{N}_h = c \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \bar{\sigma}(ht, \vartheta) \frac{t^2\, dt}{q^3} + \int_0^{2\pi} u\, d\vartheta \int_0^1 \bar{\sigma}(ht, \vartheta) \frac{t^3\, dt}{q^3} + \int_0^{2\pi} u\, d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \bar{\sigma}(ht, \vartheta) \left(\frac{t^3}{q^3} - 1\right) dt \\[2ex]
c = \cos(P_0 P, ds) = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' \\[1ex]
q = \sqrt{t^2 - 2tu' + 1} \\[1ex]
u' = \cos(P_0 Q, P_0 P) = \lambda' \cos\vartheta + \mu' \sin\vartheta .
\end{cases}
$$

En effectuant les intégrations, nous trouverons

$$
N_h^0 = M' + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[\frac{u-c}{1-u'} + 1 - u + u \log\frac{1-u}{1-u'}\right] d\vartheta + \frac{h}{a}\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(c - 3uu')\, d\vartheta + h^2 \eta_h, \ \lim_{h=0} \eta_h \text{ finie},
$$

$$\bar{N} = \int_0^{2\pi} (3\,uu' - c)\,d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r,\,\vartheta)\frac{dr}{r} + \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)\left[\frac{u-c}{1-u'} - 2\,(u-c) -\right.$$

$$\left. - 5\,uu' - (3\,uu' - c)\log\frac{1-u'}{2}\right] d\vartheta + h\eta_h,\ \lim_{h=0} \eta_h \text{ finie.}$$

D'où le résultat

$$(281)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial s} = \overline{W}_{s's} + S_{s's} \\[2ex] \overline{W}_{s's} = \lim\limits_{h=0} \overline{W}^{(h)}_{s's} \\[2ex] \overline{W}^{(h)}_{s's} = \displaystyle\int_0^{2\pi} (3\,uu' - c)\,d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r,\,\vartheta)\frac{dr}{r} \\[2ex] S_{s's} = -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3\,uu' - c)\,d\vartheta + \\[2ex] \qquad + \displaystyle\int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)\left[\frac{u-c}{1-u'} + 2\,c - 3\,u - 5\,uu' - (3\,uu' - c)\log\frac{1-u'}{2}\right] d\vartheta, \end{cases}$$

pourvu que la fonction $\sigma_0(\vartheta)$ satisfasse aux égalités

$$(282)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,u\,d\vartheta = 0 \\[2ex] \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[\frac{u-c}{1-u'} + 1 - u + u\log\frac{1-u}{1-u'}\right] d\vartheta = 0. \end{cases}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la fonction σ est de la forme*

$$\sigma = \sigma_0(\vartheta) + r\bar{\sigma}(r,\,\vartheta),\ \lim_{r=0} \bar{\sigma}(r,\,\vartheta) \text{ finie,}$$

il faut et il suffit pour l'existence de la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial s}$ $(\nu' > 0)$ *que les égalités* (282) *soient satifaites et que la quantité* $W_{s's}$ *existe. La valeur de la dérivée est donnée par les égalités* (281).

Cas particuliers. 1° Pour la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$, la seconde des égalités (282) se réduit à la première.

2° Si $\sigma_0 =$ une constante σ_1 pour $\sigma \leq \vartheta \leq \pi$, et
$= \quad » \quad » \quad \sigma_2 \quad » \quad \pi \leq \vartheta \leq 2\pi$,

les conditions (282) sont satisfaites pour toutes les directions de ds et de ds' qui sont contenues dans le plan des xz; si $\sigma_1 = \sigma_2$, les égalités (282) sont satisfaites pour toutes les directions de ds et de ds'.

3° Si $\overline{W}_{s's}$ existe, donc

$$\int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)(3uu' - c)\,d\vartheta = 0. \tag{283}$$

4° Des égalités (281), (282) et (283) on tire

$$(284)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial z \partial s} = -\sin\psi \lim\limits_{h=0} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r, \vartheta)\frac{dr}{r} + \frac{\sin\psi}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta - 2\cos\psi\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta, \\ \text{si} \\ \cos\psi \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta = 0 \quad \text{et} \\ \qquad \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)[1 - \sin\psi + \cos\psi\cos\vartheta\log(1 - \cos\psi\cos\vartheta)]\,d\vartheta = 0, \end{cases}$$

en supposant que l'élément ds soit contenu dans le plan des xz et en posant

$$\lambda = \cos\psi, \quad \mu = 0, \quad \nu = \sin\psi.$$

Des égalités (284) nous tirons d'une part

$$(285)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = -2\displaystyle\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta, \quad \text{si} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta = 0 \quad \text{et} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)[1 + \cos\vartheta\log(1 - \cos\vartheta)]\,d\vartheta = 0, \end{cases}$$

et d'autre part

$$(286) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\lim_{h=0}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r, \vartheta)\frac{dr}{r} + \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta + (1 - \log 2)\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)d\vartheta$$

sans condition particulière.

5° En supposant que l'élément ds' soit contenu dans le plan des xz et en posant

$$\lambda' = \cos\psi', \quad \mu' = 0, \quad \nu' = \sin\psi',$$

nous trouverons

$$(287) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial s' \partial z} = -\sin\psi' \lim\limits_{h=0}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r, \vartheta)\frac{dr}{r} + \frac{\sin\psi'}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta + \\ \qquad + \sin\psi'\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left[2 - \frac{1}{1 - \cos\psi'\cos\vartheta} + \log\frac{1 - \cos\psi'\cos\vartheta}{2}\right]d\vartheta, \\ \text{si} \\ \qquad \sin\psi'\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\frac{d\vartheta}{1 - \cos\psi'\cos\vartheta} = \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta. \end{cases}$$

Remarque. Si $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s' \partial z}$ existe, nous trouverons

$$\lim_{\psi'=0}\frac{\partial^2 V}{\partial s' \partial z} = -\lim_{\psi'=0}\sin\psi'\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\frac{d\vartheta}{1 - \cos\psi'\cos\vartheta} = -\pi(\sigma_+ + \sigma_-),$$

où σ_+ et σ_- sont des valeurs moyennes de $\sigma_0(\vartheta)$ pour des valeurs infiniment petites positives, resp. négatives de ϑ. La condition à remplir se réduit à

$$\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta = \pi(\sigma_+ + \sigma_-).$$

Si la fonction $\sigma(k, \vartheta)$ est continue par rapport à k et à ϑ pour de petites valeurs positives resp. négatives de ϑ, nous trouverons (cfr équ. 280)

(288) $$\lim_{\psi'=0} \frac{\partial^2 V}{\partial s' \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}.$$

§ **40.** *Lim* $\lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ *pour un point extérieur.* Soient $\lambda_1 \mu_1 \nu_1$ et $\lambda_2 \mu_2 \nu_2$ les cosinus directeurs de deux éléments ds_1 et ds_2 émanant du point P, et soient $\lambda' \mu' \nu'$ les cosinus directeurs de la droite $P_0 P = h$. Supposons $\nu' \neq 0$, et posons

(289) $$\begin{cases} u_1 = \cos(r, ds_1) = \lambda_1 \cos \vartheta + \mu_1 \sin \vartheta \\ u_2 = \cos(r, ds_2) = \lambda_2 \cos \vartheta + \mu_2 \sin \vartheta \\ c_1 = \cos(h, ds_1) = \lambda_1 \lambda' + \mu_1 \mu' + \nu_1 \nu' \\ c_2 = \cos(h, ds_2) = \lambda_2 \lambda' + \mu_2 \mu' + \nu_2 \nu' \\ c = \cos(ds_1, ds_2) = \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2, \end{cases}$$

(290) $$\begin{cases} \therefore \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \int \sigma \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial s_1 \partial s_2} d\omega - \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \sigma(r, \vartheta)(3 v_1 v_2 - c) r \frac{dr}{R^3} \\ R = PQ = \sqrt{r^2 - 2 r h u' + h^2} \\ u' = \cos(r, h) = \lambda' \cos \vartheta + \mu' \sin \vartheta \\ v_1 = \cos(R, ds_1) = \lambda_1 \frac{r \cos \vartheta - \lambda' h}{R} + \mu_1 \frac{r \sin \vartheta - \mu' h}{R} - \nu_1 \frac{\nu' h}{R} = \frac{u_1 r - h c_1}{R} \\ v_2 = \cos(R, ds_2) = \frac{u_2 r - h c_2}{R}. \end{cases}$$

Posons de plus

(291) $$r = ht, \quad R = hq, \quad \therefore q = \sqrt{t^2 - 2 t u' + 1}.$$

et supposons

(258) $$\sigma = \sigma_0(\vartheta) + r \bar{\sigma}(r, \vartheta), \ \lim_{r=0} \bar{\sigma}(r, \vartheta) \text{ finie} \equiv \sigma_0(\vartheta),$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_h}{\partial s_1 \partial s_2},$$

V_h^0 et $\bar{V}_h$ étant ce que deviendra V_h, lorsqu'on y remplace σ par $\sigma_0(\vartheta)$ et $r\bar{\sigma}(r, \vartheta)$ resp. Nous aurons

$$\frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_0^{\frac{a}{h}}\left[3u_1u_2\frac{t^3}{q^5} - 3(c_1u_2 + c_2u_1)\frac{t^2}{q^5} + 3c_1c_2\frac{t}{q^5} - \frac{ct}{q^3}\right]dt,$$

(292) $$\left\{\begin{aligned} &\therefore \frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)A_0\,d\vartheta - \frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3u_1u_2 - c)\,d\vartheta + h\eta_h, \ \lim_{h=0}\eta_h \text{ finie},\\ &A_0 = \frac{(u_1 - c_1)(u_2 - c_2)}{(1 - u')^2} + \frac{u_1u_2 - c}{1 - u'}.\end{aligned}\right.$$

Pour que $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2}$ soit finie, il faut donc que l'on ait

(293) $$\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)A_0\,d\vartheta = 0.$$

Nous aurons de même

$$\frac{\partial^2 \overline{V}_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^{\frac{a}{h}}\overline{\sigma}(r, \vartheta)\left[3u_1u_2\frac{t^4}{q^5} - 3(c_1u_2 + c_2u_1)\frac{t^3}{q^5} + 3c_1c_2\frac{t^2}{q^5} - \frac{ct^2}{q^3}\right]dt,$$

d'où nous tirons

(294) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \overline{V}_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \overline{X}^{(h)}_{s_1s_2} + A_{s_1s_2} + h\overline{\eta}_h, \ \lim_{h=0}\overline{\eta}_h \text{ finie},\\ &\overline{X}^{(h)}_{s_1s_2} = \int_0^{2\pi}(3u_1u_2 - c)\,d\vartheta\int_h^a\overline{\sigma}(r, \vartheta)\frac{dr}{r} = \int_{(h)}^{(a)}(\sigma - \sigma_0)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2}\,d\omega\\ &\overline{A}_{s_1s_2} = \int_0^{2\pi}\overline{\sigma}_0(\vartheta)\overline{A}\,d\vartheta\\ &\overline{A} = \frac{(u_1 - c_1)(u_2 - c_2)}{(1 - u')^2} + \frac{3u_1u_2 - c - (c_1u_2 + c_2u_1)}{1 - u'}\\ &\qquad - 8u_1u_2 + 2c - (3u_1u_2 - c)\log\frac{1 - u'}{2}.\end{aligned}\right.$$

Si l'égalité (293) est satisfaite, nous aurons donc

$$(295)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3\,u_1 u_2 - c)\,d\vartheta + \overline{X}_{s_1 s_2} + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,\overline{A}\,d\vartheta, \text{ où} \\[2ex] \overline{X}_{s_1 s_2} = \lim\limits_{h=0} \overline{X}^{(h)}_{s_1 s_2}, \end{cases}$$

les quantités $\overline{X}^{(h)}_{s_1 s_2}$ et $\overline{A}$ étant données par la formule (294). Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si la fonction σ est de la forme (258), la condition nécessaire et suffisante pour que $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ soit finie, est que l'égalité (293) est satisfaite, et que la quantité $X_{s_1 s_2}$ (294) a une valeur finie et déterminée. La valeur de cette limite est donnée par la formule (294).*

Cas particuliers, où l'égalité (293) est satisfaite.

1° $\sigma_0 =$ *une constante.* En effet, dirigeons l'axe des x de manière que $\mu' = 0$,

$$\therefore \lambda'^2 A_0 = (\mu_1 \mu_2 - \lambda_1 \lambda_2) u' - (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1)\lambda' \sin\vartheta + (2\,\mu_1 \mu_2 +$$

$$+ c_1 c_2 - c)\left[\frac{1}{1-u'} - \frac{1-\lambda'^2}{(1-u')^2}\right] + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 - \lambda' c_1 \mu_2 - \lambda' c_2 \mu_1)\frac{\lambda' \sin\vartheta}{(1-u')^2},\ u' = \lambda' \cos\vartheta,$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} A_0\,d\vartheta = 0.$$

2° $\sigma_0 =$ *une constante* σ_1 *pour* $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, *et* $=$ *une constante* σ_2 *pour* $\pi \leqq \vartheta \leqq 2\pi$; $\mu' = \mu_1 = \mu_2 = \lambda_2 = 0$. En effet, nous trouverons

$$\lambda' A_0 = (\nu' \lambda_1 - \lambda' \nu_1)\left[\frac{1}{1-u'} - \frac{1-\lambda'^2}{(1-u')^2}\right] \text{ etc.}$$

3° σ_0 *comme dans le cas* 2°; $\lambda' = \mu' = \mu_1 = \mu_2 = \nu_2 = 0$.

4° $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda'$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu'$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu'$, et

$$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,u\,d\vartheta = 0.$$

Remarque I. Les cas 2° et 3° font voir que dans certains cas la dérivée seconde peut avoir une limite finie, même si le point P_0 se trouve sur une

ligne de discontinuité de la densité. Dans le cas 4°, la discontinuité de la densité au point P_0 peut être assez profonde.

Remarque II. Dans le cas 4°, nous trouverons

$$
(296)\quad \left|\begin{aligned}
&\lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s^2} - \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} (3u'^2 - 1)\, d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) \frac{dr}{r} - \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3u'^2 - 1)\, d\vartheta + \\
&\qquad + \int_0^{2\pi} \overline{\sigma}_0(\vartheta) \left[2 - 3u' - 8u'^2 - (3u'^2 - 1) \log \frac{1 - u'}{2} \right] d\vartheta = \\
&\qquad\qquad = \left(\frac{\partial^2 V}{d s^2}\right)_0 - \int_0^{2\pi} \overline{\sigma}_0(\vartheta)(3u'^2 - 1)\, d\vartheta,
\end{aligned}\right.
$$

où le dernier terme est $= 0$, si $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s^2}$ existe; $\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right)_0$ est la valeur de $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ au point P_0. Nous trouverons aussi que les conditions de l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s^2}$ et de $\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right)_0$ sont les mêmes.

CHAPITRE V.

Les dérivées secondes du potentiel d'une simple couche. Surface courbe.

§ 41. *Les dérivées secondes extérieures en un point de la couche.* Soit P_0 un point de la couche, et supposons que la surface soit physiquement régulière à ce point; soient Q un point quelconque de la couche et ψ l'angle que fait la droite $P_0 Q$ avec sa projection dans le plan des xy. Supposons que le point P se meuve vers le point P_0 suivant une droite qui ne touche pas la surface. Soient $\lambda' \mu' \nu'$ les cosinus directeurs de la droite $P_0 P$, et $\lambda \mu \nu$ les cosinus directeurs de l'élément ds. Supposons que la fonction σ soit de la forme

$$
(258)\qquad \sigma = \sigma_0(\vartheta) + r\,\sigma(r, \vartheta),\ \lim_{r=0} \overline{\sigma}(r, \vartheta) \text{ finie} = \sigma_0(\vartheta),
$$

et posons

$$
(297)\qquad V = V^0 + V,
$$

où V^0 et $\overline{V}$ se rapportent aux fonctions σ_0 et $r\overline{\sigma}$.

Premier cas: $\frac{\partial^2 V^0}{\partial s' \partial s}$. Les égalités (208) donnent pour le point P_0

(208*)
$$\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial V^0}{\partial s}\right)_0 = W_s^0 + Q_s \\
&W_s^0 = \lim_{h=0} W_{sh}^0 \\
&W_{sh}^0 = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_h^a u \cos^2\psi \frac{dr}{r} \\
&Q_s = -\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{1 + u_0 + u_0 \log\left[\frac{1-u_0}{2}\cos\psi_0\right]\right\} \cos^2\psi_0\, d\vartheta \\
&u = \lambda \cos\psi \cos\vartheta + \mu \cos\psi \sin\vartheta + \nu \sin\psi,
\end{aligned}\right.$$

où $\psi_0 = \lim_{r=0} \psi(r, \vartheta)$, et où u_0 est ce que deviendra u, si l'on y substitue ψ_0 à ψ. Si W_s^0 existe, on aura

(298)
$$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, u_0 \cos^2 \psi_0\, d\vartheta = 0.$$

Posons $P_0 P = h$. Pour le point P nous avons trouvé

(220*)
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial V_h^0}{\partial s} = W_{sh}^0 + Q'_{sh} \\
&Q'_{sh} = -c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \cos\psi\, q \frac{dt}{q'^3} + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^1 u \cos\psi \cdot q^2 \frac{dt}{q'^3} + \\
&\qquad + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} u \cos\psi \left[\frac{q^2}{q'^3} - \frac{1}{q}\right] dt \\
&\frac{1}{h} P_0 Q = q = \frac{t}{\cos\psi}, \quad r = ht, \\
&\frac{1}{h} P Q = q' = \sqrt{q^2 - 2qu' + 1} \\
&\cos(h, P_0 Q) = u' = \lambda' \cos\psi \cos\vartheta + \mu' \cos\psi \sin\vartheta + \nu' \sin\psi \\
&\cos(h, ds) = c = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu', \text{ et}
\end{aligned}\right.$$

$$(222^*)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial V_h^0}{\partial s} = W_s^0 + Q'_s \\[2ex] Q'_s = -c\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\int_0^{\infty}\cos\psi_0\, q_0 \frac{dt}{q_0'^3} + \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_0^1 u_0\cos\psi_0\cdot q_0^2\frac{dt}{q_0'^3} + \\[2ex] \qquad + \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_1^{\infty}u_0\cos\psi_0\left[\frac{q_0^2}{q_0'^3}-\frac{1}{q_0}\right]dt = \\[2ex] = \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\left\{\frac{u_0-c}{1-u_0'} - 2u_0 - u_0\log\left[\frac{1-u_0'}{2}\cos\psi_0\right]\right\}\cos^2\psi_0\,d\vartheta \\[2ex] q_0 = \dfrac{t}{\cos\psi_0} \\[2ex] q_0' = \sqrt{q_0^2 - 2q_0u_0' + 1}, \end{cases}$$

$$(299)\qquad \therefore \frac{1}{h}\left[\frac{\partial V_h^0}{\partial s} - \left(\frac{\partial V^0}{\partial s}\right)_0\right] = \frac{1}{h}(W_{sh}^0 - W_s^0) + \frac{1}{h}(Q'_{sh} - Q'_s) + \frac{1}{h}(Q'_s - Q_s).$$

Nous trouverons

$$\frac{1}{h}(W_{sh}^0 - W_s^0) = -\frac{1}{h}\lim_{h'=0}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_{h'}^{h} u\cos^2\psi\frac{dr}{r} = -$$

$$-\frac{1}{h}\lim_{h'=0}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_{\frac{h'}{h}}^{1} u\cos^2\psi\frac{dt}{t}$$

pour $r = ht$. Nous supposerons de plus

$$(300)\qquad \psi(r,\vartheta) = \psi_0(\vartheta) + r\overline{\psi}(r,\vartheta),\ \lim_{r=0}\overline{\psi}\ \text{finie} \equiv \overline{\psi}_0(\vartheta).$$

En employant la formule

$$(301)\qquad f(\psi+\delta\psi) = f(\psi) + \delta\psi\, f'(\psi+\theta\,\delta\psi),\quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

nous trouverons

$$(302)\qquad \begin{cases} u\cos^2\psi = u_0\cos^2\psi_0 + (\nu\cos\psi_1 - 3u_1\cos\psi_1\sin\psi_1)\,r\overline{\psi} \\ \qquad \psi_1 = \psi_0 + \theta r\overline{\psi},\quad 0 \leq \theta \leq 1, \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{h}(W^0_{sh} - W^0_s) = \frac{1}{h}\lim_{h'=0} \log\frac{h'}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\, u_0 \cos^2\psi_0\, d\vartheta -$$

$$-\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta\int_0^1 (r\cos\psi_1 - 3\, u_1 \cos\psi_1 \sin\psi_1)\,\overline{\psi}\, dt.$$

En ayant égard à l'égalité (298), nous trouverons

$$(303) \qquad \lim_{h=0}\frac{1}{h}(W^0_{sh} - W^0_s) = \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,(3\, u_0 \sin\psi_0 - r)\cos\psi_0 \cdot \overline{\psi}_0(\vartheta)\, d\vartheta.$$

De plus nous aurons

$$(304) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{h}(Q'_{sh} - Q'_s) = -\frac{1}{h}c\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta\int_0^{\frac{a}{h}}\left(\frac{1}{q'^3} - \frac{1}{q_0'^3}\right) t\, dt\, + \\ + \frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta\int_0^1\left(\frac{u}{\cos\psi\, q'^3} - \frac{u_0}{\cos\psi_0\, q_0'^3}\right) t^2\, dt\, + \\ + \frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta\int_1^{\frac{a}{h}}\left[\left(\frac{u}{\cos\psi}\cdot\frac{1}{q'^3} - \frac{u_0}{\cos\psi_0}\cdot\frac{1}{q_0'^3}\right) t^2 - \frac{u\cos^2\psi - u_0\cos^2\psi_0}{t}\right] dt\, + \\ + \frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta\int_{\frac{a}{h}}^{\infty}\left(\frac{c\, q_0}{q_0'^3} - \frac{u_0\, q_0^2}{q_0'^3} + \frac{u_0}{q_0}\right)\cos\psi_0\, dt \equiv \frac{1}{h}A + \frac{1}{h}B + \frac{1}{h}C + \frac{1}{h}D. \end{aligned} \right.$$

Le coefficient de $\frac{1}{t^2}$ dans le développement de $\frac{t}{q'^3}$ étant $\cos^3\psi$, nous écrivons

$$\frac{t}{q'^3} - \frac{\cos^3\psi}{t^2} = \frac{t}{q_0'^3} - \frac{\cos^3\psi_0}{t^2} + \left[3\,(r' - q_1\sin\psi_1)\frac{q_1^2}{q_1'^5} + \frac{3\sin\psi_1}{q_1^2}\right]\overline{\psi}\, r,$$

$$\therefore \frac{1}{h} A = -3c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^1 \psi (r' - q_1 \sin \psi_1) \frac{q_1^3}{q_1'^5} \cos \psi_1 \, dt -$$

$$-3c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \overline{\psi} \left\{ (r' - q_1 \sin \psi_1) \frac{q_1^3}{q_1'^5} \cos \psi_1 + \frac{\cos \psi_1 \sin \psi_1}{q_1} \right\} dt + Y_h$$

(305)
$$Y_h \equiv -c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_h^a (\cos^3 \psi - \cos^3 \psi_0) \frac{dr}{r^2},$$

$$\therefore \lim_{h=0} \frac{1}{h} A = -3c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \overline{\psi}_0(\vartheta) \cos \psi_0 \, d\vartheta \int_0^1 (r' - q_0 \sin \psi_0) \frac{q_0^3}{q_0'^5} \, dt -$$

$$-3c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \overline{\psi}_0(\vartheta) \cos \psi_0 \, d\vartheta \int_1^{\infty} \left\{ (r' - q_0 \sin \psi_0) \frac{q_0^3}{q_0'^5} + \frac{\sin \psi_0}{q_0} \right\} dt + \lim_{h=0} Y_h .$$

En posant $dt = \cos \psi_0 \, dq$ et en intégrant, nous trouverons

(306)
$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} A = -c \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \overline{\psi}_0(\vartheta) \cos^2 \psi_0 \left\{ \frac{2 \ldots u'_0}{(1 - u'_0)^2} \ldots \right. \text{[illegible]}$$
$$\left. + \sin \psi_0 \left[\frac{3 u_0 - 4}{(1 - u'_0)^2} + 8 + 3 \log \left(\frac{1 - u'_0}{2} \cos \psi_0 \right) \right] \right\} d\vartheta + \lim_{h=0} Y_h .$$

De même nous trouverons

(307)
$$\lim_{h=0} \frac{1}{h} B = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \overline{\psi}_0(\vartheta) \cos^2 \psi_0 \, d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos \psi_0}} \left\{ 3 u_0 (r' - q_0 \sin \psi_0) \frac{q_0^4}{q_0'^5} + \frac{r' q_0^3}{q_0'^3} \right\} dq_0 .$$

En développant, nous trouverons que l'expression

$$\left(\frac{u}{\cos \psi} \cdot \frac{1}{q'^3} - \frac{u_0}{\cos \psi_0} \cdot \frac{1}{q_0'^3} \right) t^2 - \frac{u \cos^2 \psi - u_0 \cos^2 \psi_0}{t}$$

peut s'écrire sous la forme

$\frac{a-a_0}{t^2} + \frac{1}{t^3}(P-P_0)$, $\lim\limits_{t=\infty} (P-P_0)$ finie, où $\overline{a}-\overline{a}_0 = 3\,u\,u'\cos^3\psi - 3\,u_0\,u_0'\cos^3\psi_0$.

Nous trouverons comme précédemment

$$(308)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{h=0}\frac{1}{h}C = \int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,\overline{\psi}_0(\vartheta)\cos^2\psi_0\,d\vartheta\int\limits_{\frac{1}{\cos\psi_0}}^{\infty}\Big\{3\,u_0(\nu'-q_0\sin\psi_0)\frac{q_0^4}{q_0'^5} + \\ &\qquad + \frac{\nu q_0^3}{q_0'^3} - \nu + 3\,u_0\sin\psi_0 - 3(\nu u_0' + \nu' u_0)\frac{1}{q_0} + 15\,\frac{u_0\,u_0'\sin\psi_0}{q_0}\Big\}\,d\,q_0 + \lim_{h=0} Z_h \\ &Z_h = 3\int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\,\vartheta\int\limits_h^a(u\,u'\cos^3\psi - u_0\,u_0'\cos^3\psi_0)\frac{dr}{r^2}\,. \end{aligned}\right.$$

Enfin nous trouverons

$$(309)\qquad \lim_{h=0}\frac{1}{h}D = -\frac{1}{a}\int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3\,u_0\,u_0' - c)\cos^3\psi_0\,d\,\vartheta\,.$$

Si nous effectuons les intégrations dans les équations (307) et (308), nous trouverons le résultat suivant

$$(310)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V^0}{\partial s'\,\partial s} = W^0_{s's} + Q^0_{s's} \\ &W^0_{s's} = \lim_{h=0} W^{0\,(h)}_{s's} \\ &W^{0\,(h)}_{s's} = \int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\,\vartheta\int\limits_h^a\{(3\,u\,u' - c)\cos^3\psi - (3\,u_0\,u_0' - c)\cos^3\psi_0\}\frac{dr}{r^2} \\ &Q^0_{s's} = -\frac{1}{a}\int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3\,u_0\,u_0' - c)\cos^3\psi_0\,d\,\vartheta + \int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,\overline{\psi}_0(\vartheta)\cos^2\psi_0\,\Gamma^0_{s's}\,d\,\vartheta \\ &\Gamma^0_{s's} = 3\,[\sin\psi_0(5\,u_0\,u_0' - c) - (\nu' u_0 + \nu u_0')]\log\left[\frac{1-u_0'}{2}\cos\psi_0\right] + \\ &\qquad + (15\,u_0 + 31\,u_0\,u_0' - 8\,c)\sin\psi_0 - (8\,\nu' u_0 + 5\,\nu u_0' + 3\,\nu) + [(c\sin\psi_0 + \\ &+ \nu' u_0)(4 - 3\,u_0') - c\,\nu'(2 - u_0') - u_0\sin\psi_0(7 - 6\,u_0') + \nu(1 - u_0')]\frac{1}{(1-u_0')^2}, \end{aligned}\right.$$

pourvu que la quantité W_s^0 (208*) soit finie et que (208* et 222*)

$$Q'_s = Q_s. \tag{311}$$

Remarque I. Pour $\psi_0 = 0$, l'égalité (311) se réduit à la deuxième des égalités (282).

Deuxième cas: $\dfrac{\partial^2 \overline{V}}{\partial s' \partial s}$. Nous trouverons

$$Q'_s = Q_s = 0. \tag{312}$$

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}(\overline{W}_{sh} - \overline{W}_s) = -\int_0^{2\pi} \overline{\sigma}_0(\vartheta)\, u_0 \cos^2\psi_0\, d\vartheta. \tag{313}$$

De plus nous pourrons écrire

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{h}\overline{Q}'_{sh} = & -c\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sigma(ht,\vartheta)\frac{q^2}{q'^3}\cos^2\psi'\, dt - c\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \overline{\sigma}(ht,\vartheta)\cdot \\ & \cdot \cos^2\psi'\left[\frac{q^2}{q'^3} - \frac{1}{q}\right]dt + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \overline{\sigma}(ht,\vartheta)\, u \cos^2\psi' \frac{q^3}{q'^3}\, dt + \\ & + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \overline{\sigma}(ht,\vartheta)\, u\cos^2\psi\left[\frac{q^3}{q'^3} - 1 - \frac{3u'}{q}\right]dt + \\ & + \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma(r,\vartheta)(3uu' - c)\cos^3\psi\frac{dr}{r}. \end{aligned}\right. \tag{314}$$

En passant à la limite et en effectuant les intégrations, nous trouverons le résultat suivant:

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial^2 V}{\partial s' \partial s} = \overline{W}_{s's} + Q_{s's} \\ & \overline{W}_{s's} = \lim_{h=0} W_{s's}^{(h)} \\ & W_{s's}^{(h)} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \overline{\sigma}(r,\vartheta)(3uu' - c)\cos^3\psi\frac{dr}{r} \end{aligned}\right. \tag{315}$$

$$(315)\quad \begin{cases} \overline{Q}_{s's} = \int\limits_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)\cos^3\psi_0\,\overline{\Gamma}_{s's}\,d\vartheta \\ \overline{\Gamma}_{s's} = -(3u_0u'_0 - c)\log\left[\frac{1-u'_0}{2}\cos\psi_0\right] + \frac{u_0 - c}{1-u'_0} + 2c - 3u_0 - 5u_0u'_0\,. \end{cases}$$

Dans le cas général, nous trouverons

$$(297^*)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial s} = \frac{\partial^2 V^0}{\partial s'\,\partial s} + \frac{\overline{\partial^2 V}}{\partial s'\,\partial s}\,.$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si*

$$(316)\qquad \begin{cases} \sigma(r,\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + r\bar{\sigma}(r,\vartheta),\ \lim\limits_{r=0}\bar{\sigma}(r,\vartheta)\ \textit{finie} \\ \psi(r,\vartheta) = \psi_0(\vartheta) + r\bar{\psi}(r,\vartheta),\ \lim\limits_{r=0}\bar{\psi}(r,\vartheta)\ \textit{finie}, \end{cases}$$

si de plus la quantité W_s (208) est finie et l'égalité (311) est satisfaite, la valeur de $\frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial s}$ au point P_0 est donnée par la formule*

$$(317)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial s} = W_{s's} + Q_{s's} - \frac{1}{a}\int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3u_0u'_0 - c)\cos^3\psi_0\,d\vartheta \\ W_{s's} = \lim\limits_{h=0} W^{(h)}_{s's} \\ W^{(h)}_{s's} = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_h^a \{\sigma(r,\vartheta)(3uu' - c)\cos^3\psi - \sigma_0(\vartheta)(3u_0u'_0 - c)\cos^3\psi_0\}\frac{dr}{r^2} \\ Q_{s's} = \int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\bar{\psi}_0(\vartheta)\cos^2\psi_0\,\Gamma^0_{s's}\,d\vartheta + \int\limits_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\cos^3\psi_0\,\overline{\Gamma}_{s's}\,d\vartheta, \end{cases}$$

où les quantités $\Gamma^0_{s's}$ et $\Gamma_{s's}$ sont définies dans les formules (310) *et* (315).

On peut écrire

$$(318)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial s} = \lambda\frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial x} + \mu\frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial y} + \nu\frac{\partial^2 V}{\partial s'\,\partial z}\,.$$

Remarque II. On trouvera facilement

$$(3\,u u' - c)\cos^3\psi - (3\,u_0 u'_0 - c)\cos^3\psi_0 = 3\cos^2\psi_1\,[u_1 r' + u'_1 r - (5\,u_1 u'_1 - c)\sin\psi_1]\,r\overline{\psi}$$

$$\psi_1 = \psi_0 + \theta r\overline{\psi},\quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

par suite la quantité $W^{(h)}_{s's}$ peut s'écrire

$$W^{(h)}_{s's} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \{\sigma(r,\vartheta)(3\,u u' - c)\cos^3\psi +$$

$$+ 3\,\sigma_0(\vartheta)\cos^2\psi_1\,[u_1 r' + u'_1 r - (5\,u_1 u'_1 - c)\sin\psi_1]\,\overline{\psi}(r,\vartheta)\}\frac{dr}{r}.$$

D'où il suit que pour l'existence de la quantité $W^{(h)}_{s's}$ il faut et il suffit que la quantité

(319) $$\begin{cases} W^0_{s's} = \lim\limits_{h=0} \int_0^{2\pi} \cos^2\psi_0\,d\vartheta \int_h^a [\sigma(r,\vartheta)(3\,u_0 u'_0 - c)\cos\psi_0 + \\ \qquad\qquad + 3\,\sigma_0(\vartheta)\,C'_0\,\overline{\psi}(r,\vartheta)]\frac{dr}{r} \text{ soit finie, où} \\ \qquad C'_0 = u_0 r' + u'_0 r + (c - 5\,u_0 u'_0)\sin\psi_0. \end{cases}$$

Cas particuliers. 1° $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}$. Pour $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, $\nu' = \nu$, nous trouverons

$$Q'_s = Q_s - \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,u_0\cos^2\psi_0\,d\vartheta,$$

par suite, si W_s existe, l'égalité (311) est satisfaite à cause de l'égalité (298). Les seules conditions pour l'existence de la dérivée $\dfrac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ sont donc que les quantités W_s et $W_{s's}$ existent. On trouvera dans ce cas

(320) $$\begin{cases} \Gamma^0_{ss} = 3\,[\sin\psi_0(5\,u_0^2 - 1) - 2\,\nu u_0]\log\left(\frac{1 - u_0}{2}\cos\psi_0\right) - \\ \qquad - \sin\psi_0\left[\frac{2}{1 - u_0} + 2 - 15\,u_0 - 31\,u_0^2\right] + \nu\left[\frac{2}{1 - u_0} - 6 - 13\,u_0\right] \\ \overline{\Gamma}_{ss} = -(3\,u_0^2 - 1)\log\left(\frac{1 - u_0}{2}\cos\psi_0\right) + 1 - 3\,u_0 - 5\,u_0^2. \\ \quad \text{Pour } \psi_0 = 0 \text{ on aura} \\ \qquad \Gamma^0_{ss} = -6\,\nu u_0 \log\frac{1 - u_0}{2} + \nu\left[\frac{2}{1 - u_0} - 6 - 13\,u_0\right]. \end{cases}$$

2^0 $\psi_0 = 0$. Si W_s et W_{zs} existent, on aura

$$\nu\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\,d\vartheta = 3\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,\overline{\psi'}_0(\vartheta)\,u_0\,d\vartheta,$$

(321) $$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial s} = W_{zs} + \frac{\nu}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)d\vartheta - \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\overline{\psi}_0(\vartheta)(4\nu+u_0)d\vartheta - 2\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)u_0\,d\vartheta,$$

avec la condition

$$Q'_s - Q_s = \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)[1 - \nu + u_0\log(1-u_0)]\,d\vartheta = 0.$$

§ 42. $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\,\partial s_2}$ *pour un point extérieur.* Soient $\lambda_1\,\mu_1\,\nu_1$ et $\lambda_2\,\mu_2\,\nu_2$ les cosinus directeurs de deux éléments ds_1 et ds_2 émanant du point P, situé en dehors de la couche, et soient $\lambda'\,\mu'\,\nu'$ les cosinus directeurs de la droite $P_0P = h$. Posons

(322) $$\left\{\begin{aligned}
u_1 &= \cos(P_0Q, ds_1) = \lambda_1\cos\psi\cos\vartheta + \mu_1\cos\psi\sin\vartheta + \nu_1\sin\psi\\
u_2 &= \cos(P_0Q, ds_2) = \lambda_2\cos\psi\cos\vartheta + \mu_2\cos\psi\sin\vartheta + \nu_2\sin\psi\\
u' &= \cos(P_0Q, P_0P) = \lambda'\cos\psi\cos\vartheta + \mu'\cos\psi\sin\vartheta + \nu'\sin\psi\\
c_1 &= \cos(h, ds_1) = \lambda_1\lambda' + \mu_1\mu' + \nu_1\nu'\\
c_2 &= \cos(h, ds_2) = \lambda_2\lambda' + \mu_2\mu' + \nu_2\nu'\\
c &= \cos(ds_1, ds_2) = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2\\
r' &= P_0Q = \frac{r}{\cos\psi}\\
R &= PQ = \sqrt{r'^2 - 2r'hu' + h^2}\\
v_1 &= \cos(R, ds_1) = \frac{r'u_1 - hc_1}{R}\\
v_2 &= \cos(R, ds_2) = \frac{r'u_2 - hc_2}{R}\\
r &= ht\\
\frac{t}{\cos\psi} &= q\\
q' &= \sqrt{q^2 - 2qu' + 1}
\end{aligned}\right.$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\,\partial s_2} = \int\sigma\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial s_1\,\partial s_2}\,d\omega = \int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^a\sigma(r,\vartheta)\,(3v_1v_2 - c)\frac{r\,dr}{R^3}\,.$$

Supposons

$$(316^*)\quad \begin{cases} \sigma(r,\vartheta)=\sigma_0(\vartheta)+r\sigma(r,\vartheta),\ \bar{\sigma}(r,\vartheta)=\sigma_0(\vartheta)+\sigma_1(r,\vartheta),\ \lim\limits_{r=0}\sigma_1(r,\vartheta)=0 \\ \psi(r,\vartheta)=\psi_0(\vartheta)+r\psi(r,\vartheta),\ \bar{\psi}(r,\vartheta)=\bar{\psi}_0(\vartheta)+\bar{\psi}_1(r,\vartheta),\ \lim\limits_{r=0}\psi_1(r,\vartheta)=0, \end{cases}$$

et posons

$$V_h = V_h^0 + V_h,$$

où V_h^0 se rapporte à σ_0 et V_h à $r\sigma$.

Premier cas: $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2}$. Nous trouverons

$$\frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_0^{\frac{a}{h}}\left[3(u_1 q - c_1)(u_2 q - c_2)\frac{1}{q'^2} - c\right]\frac{tdt}{q'^3}.$$

et nous aurons ensuite

$$(323)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\cos^2\psi_0 A'_0 d\vartheta - \dfrac{1}{a}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3u_1^0u_2^0 - c)\cos^3\psi_0 d\vartheta + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)B'd\vartheta + \eta_h,\ \lim_{h=0}\eta_h = 0 \\ A_0' = \dfrac{(u_1^0 - c_1)(u_2^0 - c_2)}{(1-u_0')^2} + \dfrac{u_1^0u_2^0 - c}{1-u_0'},\ u_1^0 = \lim\limits_{r=0} u_1 \text{ etc.} \\ B' = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}}\left(\frac{e}{q'^3} - \frac{e_0}{q_0'^3}\right)tdt \\ e = 3(u_1 q - c_1)(u_2 q - c_2)\dfrac{1}{q'^2} - c,\ e_0 = \lim\limits_{r=0} e. \end{cases}$$

Le coefficient de $\dfrac{1}{t^2}$ dans le développement de l'expression

$$\frac{et}{q'^3}$$

étant

$$(3\, u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi,$$

nous posons

$$\left(\frac{e}{q'^3} - \frac{e_0}{q_0'^3}\right) t = \left[\frac{te}{q'^3} - (3\, u_1 u_2 - c)\frac{\cos^3 \psi}{t^2}\right] - \left[\frac{te_0}{q_0'^3} - (3\, u_1^0 u_2^0 - c)\frac{\cos^3 \psi_0}{t^2}\right] +$$

$$+ [3\, u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi - (3\, u_1^0 u_2^0 - c) \cos^3 \psi_0]\frac{1}{t^2},$$

et en employant la formule

$$f(\psi_0 + r\psi) - f(\psi_0) = f'(\psi_0 + \theta r \psi) r \psi, \qquad 0 < \theta < 1,$$

nous trouverons

$$B' = 3\int_0^1 \left(\frac{5\, A_1}{q_1'^7} + \frac{B_1}{q_1'^5}\right) \cos \psi_1 \psi\, dt + 3\int_1^{\frac{a}{h}} \left[\frac{5\, A_2}{q_2'^7} + \frac{B_2}{q_2'^5} - \frac{C_2}{q_2}\right] \cos \psi_2 \overline{\psi}\, dt +$$

$$+ \int_1^{\frac{a}{h}} [3\, u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi - (3\, u_1^0 u_2^0 - c) \cos^3 \psi_0] \frac{dt}{t^2}$$

$$A = (\nu' - q \sin \psi)(u_1 q - c_1)(u_2 q - c_2) q^3$$
$$B = [(\nu_1 u_2 + \nu_2 u_1) q - (\nu_1 c_2 + \nu_2 c_1) - c(\nu' - q \sin \psi)] q^3$$
$$C = \nu_1 u_2 + \nu_2 u_1 + (c - 5\, u_1 u_2) \sin \psi,$$

A_1, B_1, A_2, B_2 et C_2 étant ce que deviendront les quantités A, B, C, lorsqu'on y remplace ψ par ψ_1, resp. ψ_2, où

$$\psi_1 = \psi_0 + \theta_1 r \psi,\ \psi_2 = \psi_0 + \theta_2 r \psi,\ 0 \leqq \theta_1 \leqq 1,\ 0 < \theta_2 \leqq 1.$$

En passant à la limite, nous trouverons

$$(324)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2} = C_{s_1 s_2}^0 - \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3\, u_1^0 u_2^0 - c) \cos^3 \psi_0\, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \overline{\psi}_0(\vartheta) E \cos^2 \psi_0\, d\vartheta \\ C_{s_1 s_2}'^0 = \lim C_{s_1 s_2}'^{0(h)} \\ C_{s_1 s_2}'^{0(h)} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta \int_h^a \left[(3\, u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi - (3\, u_1^0 u_2^0 - c) \cos^3 \psi_0\right] \frac{dr}{r^2} \end{cases}$$

(324)
$$\begin{cases} E = c_1 c_2 r' F_1 - [c_1 c_2 \sin \psi_0 + r'(c_1 u_2^0 + c_2 u_1^0)] F_2 + \\ + [r' u_1^0 u_2^0 + (c_1 u_2^0 + c_2 u_1^0) \sin \psi_0] F_3 - u_1^0 u_2^0 \sin \psi_0 F_4 - \\ - (c_1 r_2 + c_2 r_1 + c r') G_1 + (r_1 u_2^0 + r_2 u_1^0 + c \sin \psi_0) G_2 , \end{cases}$$

où

(325)
$$\begin{cases} F_1 = 15 \int\limits_0^\infty q_0^3 \frac{d q_0}{q'^7_0} = \frac{2}{(1 - u'_0)^3} \\ F_2 = 15 \int\limits_0^\infty \frac{q_0^4 d q_0}{q'^7_0} = \frac{2}{(1 - u'_0)^3} + \frac{1}{(1 - u'_0)^2} \\ F_3 = 15 \int\limits_0^\infty \frac{q_0^5 d q_0}{q'^7_0} = \frac{2}{(1 - u'_0)^3} + \frac{3}{(1 - u'_0)^2} + \frac{3}{1 - u'_0} \\ F_4 = 15 \int\limits_0^{\frac{1}{\cos \psi_0}} \frac{q_0^6 d q_0}{q'^7_0} + 15 \int\limits_{\frac{1}{\cos \psi_0}}^\infty \left(\frac{q_0^6}{q'^7_0} - \frac{1}{q_0} \right) d q_0 = \frac{2}{(1 - u'_0)^3} + \frac{6}{(1 - u'_0)^2} + \\ \qquad + \frac{15}{1 - u'_0} - 46 - 15 \log \left(\frac{1 - u'_0}{2} \cos \psi_0 \right) \\ G_1 = \int\limits_0^\infty \frac{q_0^3 d q_0}{q'^5_0} = \frac{1}{(1 - u'_0)^2} + \frac{1}{1 - u'_0} \\ G_2 = 3 \int\limits_0^{\frac{1}{\cos \psi_0}} \frac{q_0^4}{q'^5_0} d q_0 + 3 \int\limits_{\frac{1}{\cos \psi_0}}^\infty \left(\frac{q_0^4}{q'^5_0} - \frac{1}{q_0} \right) d q_0 = \frac{1}{(1 - u'_0)^2} + \frac{3}{1 - u'_0} \\ \qquad - 8 - 3 \log \left(\frac{1 - u'_0}{2} \cos \psi_0 \right) . \end{cases}$$

La condition à remplir est

(326)
$$\begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} \sigma(\vartheta) A'_0 \cos^2 \psi_0 \, d \vartheta = 0 \\ A'_0 = \frac{(u_1^0 - c_1)(u_2^0 - c_2)}{(1 - u'_0)^2} + \frac{u_1^0 u_2^0 - c}{1 - u'_0} . \end{cases}$$

Deuxième cas: $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$. Nous aurons

$$\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_0^{\frac{a}{h}} \bar{\sigma}(ht, \vartheta) \left\{ 3 (u_1 q - c_1)(u_2 q - c_2) \frac{1}{q'^2} - c \right\} \frac{t^2 dt}{q'^3},$$

et nous trouverons

$$(327) \quad \left\{ \begin{aligned} & \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \bar{C}_{s_1 s_2} + \int\limits_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta) \bar{A}' \cos^3 \psi_0 d\vartheta \\ & \bar{C}_{s_1 s_2} = \lim_{h=0} \bar{C}_{s_1 s_2}^{(h)} \\ & \bar{C}_{s_1 s_2}^{(h)} = \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_h^{a} \bar{\sigma}(r, \vartheta)(3 u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi \frac{dr}{r} \\ & \bar{A}' = -(3 u_1^0 u_2^0 - c) \log \left(\frac{1 - u'_0}{2} \cos \psi_0 \right) + \frac{(u_1^0 - c_1)(u_2^0 - c_2)}{(1 - u_0')^2} - \\ & \qquad - 8 u_1^0 u_2^0 + 2c + [3 u_1^0 u_2^0 - c - (c_1 u_2^0 + c_2 u_1^0)] \frac{1}{1 - u_0'}. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas général, nous aurons

$$(328) \qquad \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \lim_{h=0} \left[\frac{\partial^2 V_h^0}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_h}{\partial s_1 \partial s_2} \right],$$

où les deux termes du second membre sont définis par les systèmes (324) et (327), l'égalité (326) étant supposée satisfaite. Pour que le premier membre de l'égalité (328) soit fini, il faut donc que la quantité

$$(329) \qquad \left\{ \begin{aligned} & C_{s_1 s_2} = \lim_{h=0} C_{s_1 s_2}^{(h)} \\ & \text{soit finie, où} \\ & C_{s_1 s_2}^{(h)} = C_{s_1 s_2}^{0(h)} + \bar{C}_{s_1 s_2}^{(h)}. \end{aligned} \right.$$

Cette condition, à savoir que la quantité $C_{s_1 s_2}$ doit être finie, peut être remplacée par cette autre que la quantité correspondante, où l'on a remplacé $\psi(r, \vartheta)$ par $\psi_0(\vartheta)$ (cfr. 319), doit être finie. Celle-ci peut être remplacée par les deux suivantes (316*)

$$(330)\quad \begin{cases} D_{s_1s_2} = \int\limits_0^{2\pi} \{3\,\sigma_0(\vartheta)\bar{\psi}_0(\vartheta)C_0 + \bar{\sigma}_0(\vartheta)(3\,u_1^0u_2^0 - c)\cos\psi_0\}\cos^2\psi_0 d\,\vartheta = 0 \\ E'_{s_1s_2} = \lim\limits_{h=0} E'^{(h)}_{s_1s_2} = \text{une quantité finie, où} \\ C_0 = v_1u_2^0 + v_2u_1^0 + (c - 5\,u_1^0u_2^0)\sin\psi_0 \\ E'^{(h)}_{s_1s_2} = \int\limits_0^{2\pi}\cos^2\psi_0 d\,\vartheta \int\limits_h^a \{3\,\sigma_0(\vartheta)C_0\psi_1(r,\vartheta) + (3\,u_1^0u_2^0 - c)\cos\psi_0\sigma_1(r,\vartheta)\}\dfrac{dr}{r}. \end{cases}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Si les fonctions $\sigma(r, \vartheta)$ et $\psi(r, \vartheta)$ peuvent être représentées par les formules* (316*), *les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de* $\lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ *sont que les équations* (326) *et* (330) *sont satisfaites, et on trouvera*

$$(331)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0}\dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\partial s_2} = A_{s_1s_2} + C_{s_1s_2} - \dfrac{1}{a}\int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(3\,u_1^0u_2^0 - c)\cos^3\psi_0 d\vartheta \\ A_{s_1s_2} = \int\limits_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\bar{\psi}_0(\vartheta)E\cos^2\psi_0 d\,\vartheta + \int\limits_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\overline{A'}\cos^3\psi_0 d\,\vartheta \\ C_{s_1s_2} = \lim\limits_{h=0} C^{(h)}_{s_1s_2} \\ C^{(h)}_{s_1s_2} = \int\limits_0^{2\pi} d\,\vartheta\int\limits_h^a [\sigma(r,\vartheta)(3\,u_1u_2 - c)\cos^3\psi - \sigma_0(\vartheta)(3\,u_1^0u_2^0 - c)\cos^3\psi_0]\dfrac{dr}{r^2}, \end{cases}$$

où les quantités E et A' sont définies dans les systèmes (324) *et* (327).

Remarque I. On trouvera (317)

$$W^{(h)}_{s_1s_2} = C^{(h)}_{s_1s_2}.$$

Remarque II. On a toujours

$$(332)\qquad \lim_{h=0}\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1\partial s_2} = \lim_{h=0}\frac{\partial^2 V_h}{\partial s_2\partial s_1}.$$

Remarque III. Pour $\psi_0 = 0$, la condition (326) devient identique à la condition correspondante (293) pour le plan.

Remarque IV. Si $\psi'_0 = 0$, on trouvera (330) que les quantités

$$\lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial x^2}, \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial y^2}, \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial z^2}, \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial x \partial y} \text{ et } \lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$$

existent dans les mêmes cas que pour une surface plane.

Remarque V. Pour

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda', \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu', \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu'$$

nous trouverons que la condition (326) se réduit à la suivante

298*) $$\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) u'_0 \cos^2 \psi'_0 d\vartheta = 0.$$

De plus nous trouverons (317) et (331)

(333) $$\lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = -D_{ss}.$$

D'où il suit (319, 330) que $\lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s^2}$ existe ou n'existe pas en même temps que la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$ au point P_0, et que ces deux quantités sont égales, si elles existent, la droite $P_0 P$ étant prise dans la direction de ds.

§ 43. **Cas particuliers.** I. *Point régulier.* Supposons

(334) $$\begin{cases} \sigma_0(\vartheta) = \text{une constante } \sigma_0 \\ \psi_0(\vartheta) = 0 \\ \bar{\sigma}_0(\vartheta) = a' \cos \vartheta + b' \sin \vartheta \\ \bar{\psi}_0(\vartheta) = \alpha \cos^2 \vartheta + 2\beta \cos \vartheta \sin \vartheta + \gamma \sin^2 \vartheta, \end{cases}$$

a' b' α β et γ étant des constantes.

Dans ce cas, la condition (326) est satisfaite (cfr 293). De plus la première des conditions (330) est satisfaite. On trouvera donc que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de $\lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ est dans ce cas que la quantité

(330*) $$\begin{cases} E'_{s_1 s_2} - \lim_{h=0} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a [3\sigma_0(\nu_1 u_2^0 + \nu_2 u_1^0)\bar{\psi}_1(r, \vartheta) + (3 u_1^0 u_2^0 - c)\bar{\sigma}_1(r, \vartheta)] \frac{dr}{r} \\ u_1^0 = \lambda_1 \cos \vartheta + \mu_1 \sin \vartheta, \quad u_2^0 = \lambda_2 \cos \vartheta + \mu_2 \sin \vartheta \end{cases}$$

existe.

La valeur de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ s'obtient (331) par la formule

$$(335)\quad\left\{\begin{aligned}
&\lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = C_{s_1 s_2} + \sigma_0 \int_0^{2\pi} \psi_0(\vartheta) E_0 d\vartheta + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \overline{A'}_0 d\vartheta + \frac{1}{a} \pi \sigma_0 (3 \nu_1 \nu_2 - c) \\
&E_0 = c_1 c_2 \nu' F_1 - \nu'(c_1 u_2^0 + c_2 u_1^0) F_2 + \nu' u_1^0 u_2^0 F_3 - \\
&\qquad\qquad - (c_1 \nu_2 + c_2 \nu_1 + c \nu') G_1 + (\nu_1 u_2^0 + \nu_2 u_1^0) G_2 \\
&A'_0 = \frac{(u_1^0 - c_1)(u_2^0 - c_2)}{(1 - u_0')^2} + [3 u_1^0 u_2^0 - (c_1 u_2^0 + c_2 u_1^0) - c] \frac{1}{1 - u_0'} - \\
&\qquad\qquad - (3 u_1^0 u_2^0 - c) \log(1 - u_0') \\
&u_0' = \lambda' \cos\vartheta + \mu' \sin\vartheta,
\end{aligned}\right.$$

où la quantité $C_{s_1 s_2}$ est définie dans le système (331).

En effectuant les intégrations, nous trouverons

$$\sigma_0 c_1 c_2 \nu' \int_0^{2\pi} \psi_0(\vartheta) F_1 d\vartheta = 2\pi \sigma_0 c_1 c_2 \left\{ \alpha \left(\frac{3\lambda'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2} \right) + 6 \beta \frac{\lambda' \mu'}{\nu'^4} + \gamma \left(\frac{3\mu'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2} \right) \right\},$$

$$\begin{aligned}
- \sigma_0 \nu' \int_0^{2\pi} \psi_0(\vartheta)(c_1 u_2^0 + c_2 u_1^0) F_2 d\vartheta = &- 6\pi \sigma_0 \alpha \lambda' (c_1 \lambda_2 + c_2 \lambda_1) \left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^4} + \frac{\mu'^2}{\nu'^2} \right) - \\
&- 2\pi \sigma_0 \alpha \mu' (c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1) \left(\frac{3\lambda'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2} \right) - 4\pi \sigma_0 \beta \mu' (c_1 \lambda_2 + c_2 \lambda_1) \left(\frac{3\lambda'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2} \right) - \\
&- 4\pi \sigma_0 \beta \lambda' (c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1) \left(\frac{3\mu'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2} \right) - 2\pi \sigma_0 \gamma \lambda' (c_1 \lambda_2 + c_2 \lambda_1) \left(\frac{3\mu'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2} \right) - \\
&- 6\pi \sigma_0 \gamma \mu' (c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1) \left(\frac{\mu'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu' \int_0^{2\pi} \psi_0(\vartheta) u_1^0 u_2^0 F_3 d\vartheta = &\, 6\pi \sigma_0 \alpha \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{\lambda'^4}{\nu'^4} + \frac{2\lambda'^2}{\nu'^2} + 1 \right) + 6\pi \sigma_0 \alpha \lambda' \mu' (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2} \right) + \\
&+ 2\pi \sigma_0 \alpha \mu_1 \mu_2 \left(\frac{3\lambda'^2 \mu'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2} \right) + 6\pi \sigma_0 \beta \lambda' \mu' \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2} \right) + \\
&+ 2\pi \sigma_0 \beta (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \left(\frac{3\lambda'^2 \mu'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2} \right) + 6\pi \sigma_0 \beta \lambda' \mu' \mu_1 \mu_2 \left(\frac{\mu'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2} \right) +
\end{aligned}$$

$$+ 2\pi\sigma_0\gamma\lambda_1\lambda_2\left(\frac{3\lambda'^2\mu'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2}\right) + 6\pi\sigma_0\gamma\lambda'\mu'(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^4} + \frac{1}{\nu'^2}\right) +$$

$$+ 6\pi\sigma_0\gamma\mu_1\mu_2\left(\frac{\mu'^4}{\nu'^4} + \frac{2\mu'^2}{\nu'^2} + 1\right),$$

$$-\sigma_0\int_0^{2\pi}\overline{\psi}_0(\vartheta)(c_1\nu_2 + c_2\nu_1 + c\nu')G_1 d\vartheta = 2\pi\sigma_0\alpha\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3} + \frac{1}{\nu'}\right) + 4\pi\sigma_0\beta\frac{\lambda'\mu'}{\nu'^3} + 2\pi\sigma_0\gamma\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3} + \frac{1}{\nu'}\right).$$

$$\sigma_0\int_0^{2\pi}\overline{\psi}_0(\vartheta)(\nu_1 u_2^0 + \nu_2 u_1^0)G_2 d\vartheta = 2\pi\sigma_0\alpha\lambda'(\lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1)\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3} + \frac{3}{\nu'}\right) +$$

$$+ 2\pi\sigma_0\alpha\mu'(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1)\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3} + \frac{1}{\nu'}\right) + 2\pi\sigma_0\beta\mu'(\lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1)\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3} + \frac{1}{\nu'}\right) +$$

$$+ 2\pi\sigma_0\beta\lambda'(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3} + \frac{1}{\nu'}\right) + 2\pi\sigma_0\gamma\lambda'(\lambda_1\nu_2 + \lambda_2\nu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3} + \frac{1}{\nu'}\right) +$$

$$+ 2\pi\sigma_0\gamma\mu'(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3} + \frac{3}{\nu'}\right),$$

$$(336)\ \therefore\ \sigma_0\int_0^{2\pi}\overline{\psi}_0(\vartheta)E_0 d\vartheta = 4\pi\sigma_0\alpha(\lambda_1\lambda_2 - \nu_1\nu_2) + 4\pi\sigma_0\beta(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + 4\pi\sigma_0\gamma(\mu_1\mu_2 - \nu_1\nu_2).$$

De plus nous aurons

$$\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)A'_0 d\vartheta = H_1 + H_2 + H_3$$

$$H_1 = \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)u_1^0 u_2^0\left[\frac{1}{(1 - u'_0)^2} + \frac{3}{1 - u'_0} - 3\log(1 - u'_0)\right]d\vartheta = 2\pi a'\lambda'\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3} + \frac{3}{\nu'}\right) +$$

$$+ 2\pi a'\mu'(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3} + \frac{1}{\nu'}\right) + 2\pi a'\lambda'\mu_1\mu_2\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3} + \frac{1}{\nu'}\right) + 2\pi b'\mu'\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3} + \frac{1}{\nu'}\right) +$$

$$+ 2\pi b'\lambda'(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3} + \frac{1}{\nu'}\right) + 2\pi b'\mu'\mu_1\mu_2\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3} + \frac{3}{\nu'}\right)$$

$$H_2 = -\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(c_1 u_2^0 + c_2 u_1^0)\left[\frac{1}{(1 - u'_0)^2} + \frac{1}{1 - u'_0}\right]d\vartheta = -2\pi a'(c_1\lambda_2 + c_2\lambda_1)\left(\frac{\lambda'^2}{\nu'^3} + \frac{1}{\nu'}\right) -$$

$$-2\pi a' \frac{\lambda' \mu'}{\nu'^3}(c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1) - 2\pi b' \frac{\lambda' \mu'}{\nu'^3}(c_1 \lambda_2 + c_2 \lambda_1) - 2\pi b'(c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1)\left(\frac{\mu'^2}{\nu'^3} + \frac{1}{\nu'}\right)$$

$$H_5 = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[\frac{c_1 c_2}{(1 - u'_0)^2} - c\left(\frac{1}{1 - u'_0} - \log \overline{1 - u'_0}\right)\right] d\vartheta = 2\pi a' c_1 c_2 \frac{\lambda'}{\nu'^3} - 2\pi a' c \frac{\lambda'}{\nu'} +$$

$$+ 2\pi b' c_1 c_2 \frac{\mu'}{\nu'^3} - 2\pi b' c \frac{\mu'}{\nu'},$$

(337) $$\therefore \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) A'_0 \, d\vartheta = -2\pi a'(\lambda_1 \nu_2 + \lambda_2 \nu_1) - 2\pi b'(\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1).$$

D'où le résultat:

(338) $$\left\{\begin{aligned} &\lim_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2} = \lim_{h=0} C^{(h)}_{s_1 s_2} + K_{s_1 s_2} + \frac{1}{a}\pi\sigma_0(3\nu_1 \nu_2 - c) \\ &C^{(h)}_{s_1 s_2} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a [\sigma(r, \vartheta)(3 u_1 u_2 - c)\cos^3\psi - \sigma_0(3 u_1^0 u_2^0 - c)] \frac{dr}{r^2} \\ &K_{s_1 s_2} = 4\pi\sigma_0 \alpha(\lambda_1 \lambda_2 - \nu_1 \nu_2) + 4\pi\sigma_0 \beta(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + 4\pi\sigma_0 \gamma(\mu_1 \mu_2 - \nu_1 \nu_2) - \\ &\qquad - 2\pi a'(\lambda_1 \nu_2 + \lambda_2 \nu_1) - 2\pi b'(\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1), \\ &\therefore K_{xx} = 4\pi\sigma_0 \alpha, \; K_{xy} = K_{yx} = 4\pi\sigma_0 \beta, \; K_{yy} = 4\pi\sigma_0 \gamma \\ &\quad K_{zz} = -4\pi\sigma_0(\alpha + \gamma), \; K_{xz} = K_{zx} = -2\pi a', \; K_{yz} = K_{zy} = -2\pi b'. \end{aligned}\right.$$

II. *Point conique.* Supposons

(339) $$\left\{\begin{aligned} &\sigma_0(\vartheta) = \text{une constante } \sigma_0 \\ &\psi'_0(\vartheta) = \text{une constante } \psi'_0 \neq 0 \\ &\bar{\sigma}_0(\vartheta) = a' \cos\vartheta + b' \sin\vartheta \\ &\psi''_0(\vartheta) = \alpha \cos^2\vartheta + 2\beta \cos\vartheta \sin\vartheta + \gamma \sin^2\vartheta. \end{aligned}\right.$$

Comme nous avons supposé que la droite $P_0 P$ n'est pas tangente à la surface, il faut que ν' soit $\neq \sin\psi'_0$. Nous distinguerons trois cas.

1° $\nu' < \sin\psi'_0$. Nous trouverons (326)

(340) $$\left\{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \sigma_0 A'_0 \cos^2\psi_0 \, d\vartheta = 2\pi\sigma_0 \sin\psi'_0 \cos^2\psi'_0 \left\{\frac{(c_1 - \nu' \nu_1)(c_2 - \nu' \nu_2)}{(1 - \nu')^2}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\nu_1 \nu_2 - c}{1 - \nu'} + \frac{\nu_1(c_2 - \nu' \nu_2) + \nu_2(c_1 - \nu' \nu_1)}{1 - \nu'} + \nu_1 \nu_2\right\}. \end{aligned}\right.$$

2°. $1 > r' > \sin \psi_0$.

$$(341)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \sigma_0 A'_0 \cos^2 \psi'_0 \, d\vartheta = -2\pi \sigma_0 \sin \psi'_0 \cos^2 \psi'_0 \left\{ \frac{(c_1 - r' r_1)(c_2 - r' r_2)}{(1 + r')^2} + \frac{r_1 r_2 - c}{1 + r'} + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{r_1 (c_2 - r' r_2) + r_2 (c_1 - r' r_1)}{1 + r'} + r_1 r_2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

3°. $r' = 1$.

$$(342)\quad \int_0^{2\pi} \sigma_0 A'_0 \cos^2 \psi'_0 \, d\vartheta = \pi \sigma_0 \sin \psi'_0 \cos^2 \psi'_0 (c - 3 r_1 r_2).$$

Pour les trois cas, nous trouverons (330)

$$(343)\quad \left\{ \begin{aligned} &D_{s_1 s_2} = 3\pi \sigma_0 \cos^2 \psi'_0 \sin \psi_0 \left\{ (c - 3 r_1 r_2)(\alpha + \gamma) - \frac{5}{4} \cos^2 \psi'_0 [(c - 5 r_1 r_2)(\alpha + \gamma) + \right. \\ &\left. + 2 \lambda_1 \lambda_2 \alpha + 2(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) \beta + 2 \mu_1 \mu_2 \gamma] \right\} + 3\pi \cos^4 \psi_0 \sin \psi_0 \{ (\lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_1) a' + \\ &\qquad\qquad + (\mu_1 r_2 + \mu_2 r_1) b' \}. \end{aligned} \right.$$

Cas particuliers. La condition (326) et la première des conditions (330) n'étant pas toujours remplies, $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ n'est pas en général finie pour toutes les directions de ds_1, de ds_2 et de $P_0 P$. Pour que ces conditions soient remplies, il suffit que

$$(344)\quad 1^\circ \quad \left\{ \begin{aligned} &\psi'_0 = \frac{\pi}{2} \\ &\alpha + \gamma = 0, \text{ ou que} \end{aligned} \right.$$

$$(345)\quad 2^\circ \quad \left\{ \begin{aligned} &\psi_0 = \frac{\pi}{2} \\ &c = 3 r_1 r_2, \text{ ou enfin que} \end{aligned} \right.$$

$$(346)\quad 3^\circ \quad \left\{ \begin{aligned} &\beta = 0 \\ &\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 = 2 r_1 r_2 \\ &\alpha \lambda_1 \lambda_2 + \gamma \mu_1 \mu_2 = (\alpha + \gamma) r_1 r_2 \\ &(\lambda_1 r_3 + \lambda_2 r_1) a' + (\mu_1 r_2 + \mu_2 r_1) b' = 0. \end{aligned} \right.$$

§ **44.** *Changement brusque de la valeur de la dérivée en traversant la surface.* Nous considérerons les deux cas: 1° les dérivées extérieures en un point de la surface (§ 41), et 2° les limites des dérivées extérieures (§§ 42, 43).

1° $\frac{\partial^2 V}{\partial s' \partial s}$. Dans ce qui précède, nous avons toujours dirigé l'axe des z positifs vers le côté du plan des xy, où se trouve le point P. Si la direction de la droite $P_0 P$ change en la direction opposée, il faut changer la direction positive de l'axe des z. Les formules qui ont lieu pour la première direction auront ieu aussi pour la direction opposée, si l'on y change $\psi(r, \vartheta)$ en $-\psi(r, \vartheta)$, les cosinus directeurs λ' et μ' de la droite $P_0 P$ en $-\lambda'$ et $-\mu'$ resp. — la quantité ν' ne changeant pas — et la quantité r en $-r$. Nous distinguerons les deux côtés de la surface par les signes $+$ et $-$.

Les systèmes (208*) et (220*) montrent que les quantités u' et c changent en $-u'$ et $-c$ resp., mais que la quantité u ne change pas. Le système (317) donne

$$(347) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial s'_+ \partial s} + \frac{\partial^2 V}{\partial s'_- \partial s} = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \psi'_0(\vartheta)\, (\Gamma^0_{s'_+ s} - \Gamma^0_{s'_- s}) \cos^2 \psi_0\, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, (\bar{\Gamma}_{s'_+ s} + \\ + \bar{\Gamma}_{s'_- s}) \cos^3 \psi_0\, d\vartheta, \end{aligned} \right.$$

les valeurs de $\Gamma^0_{s's}$ et de $\bar{\Gamma}_{s's}$ étant données dans les systèmes (310) et (315).

Remarque I. L'égalité (347) montre que si la direction de ds' change en la direction opposée, la direction de ds restant la même, la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s'_+ \partial s}$ ne change pas en général en $-\frac{\partial^2 V}{\partial s'_- \partial s}$.

Cas particulier. Supposons $\psi_0 = 0$, $\lambda' = \mu' = 0$. La condition (311) se réduit (321) à

$$(348) \qquad \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, [1 - \nu + u_0 \log(1 - u_0)]\, d\vartheta = 0, \quad u_0 = \lambda \cos\vartheta + \mu \sin\vartheta,$$

et nous trouverons (321)

$$(349) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial z_+ \partial s} + \frac{\partial^2 V}{\partial z_- \partial s} = -8\, r \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \bar{\psi}'_0(\vartheta)\, d\vartheta - 4 \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, u_0\, d\vartheta.$$

2° $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$. Pour le côté négatif, il faut faire les mêmes changements que dans le cas précédent, mais au lieu de changer la quantité r, il faut ici changer les quantités correspondantes r_1 et r_2 en $-r_1$ et $-r_2$. Des égalités

(322) nous tirons que les quantités u', c_1 et c_2 changent en $-u'$, $-c_1$ et $-c_2$ resp., les quantités u_1, u_2 et c ne changeant point. De l'équation (331) nous tirons

$$(350)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_{h+}}{\partial s_1 \partial s_2} - \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_{h-}}{\partial s_1 \partial s_2} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \psi'_0(\vartheta)\,(E_+ + E_-) \cos^2 \psi_0\, d\vartheta + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,(A'_+ - A'_-) \cos^3 \psi_0\, d\vartheta. \end{cases}$$

Remarque II. Les conditions (330) de l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_{h-}}{\partial s_1 \partial s_2}$ sont identiques à celles de l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_{h+}}{\partial s_1 \partial s_2}$, mais la condition (326) peut être différente pour les deux côtés.

Remarque III. Dans le cas où $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial^2 V_h}{\partial s_1 \partial s_2}$ n'existe pas, nous retrouverons l'égalité (350), si nous changeons le premier membre en

$$(351)\qquad \lim_{h=0} \left[\frac{\partial^2 V_{h+}}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 V_{h-}}{\partial s_1 \partial s_2}\right].$$

La seule condition à satisfaire est (326)

$$(352)\quad \begin{cases} I_+ = I_-, \qquad \text{où} \\ I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, A'_0 \cos^2 \psi_0\, d\vartheta. \end{cases}$$

Cas particulier: *Point régulier.* Si les égalités (334) sont satisfaites, nous trouverons (338)

$$(353)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \left[\dfrac{\partial^2 V_{h+}}{\partial s_1 \partial s_2} - \dfrac{\partial^2 V_{h-}}{\partial s_1 \partial s_2}\right] = 8\pi\sigma_0 \alpha (\lambda_1 \lambda_2 - \nu_1 \nu_2) + 8\pi\sigma_0 \beta (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + \\ \qquad + 8\pi\sigma_0 \gamma (\mu_1 \mu_2 - \nu_1 \nu_2) - 4\pi a' (\lambda_1 \nu_2 + \lambda_2 \nu_1) - 4\pi b' (\mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu_1). \end{cases}$$

Remarque IV. L'égalité (353) a lieu sans aucune condition additive. Mais si nous voulons écrire le premier membre de la même manière que dans l'égalité (350), il faut que la quantité $E'_{s_1 s_2}$ (330*) existe.

Corollaires. Nous trouverons (353)

(354)
$$\begin{cases}\lim\limits_{h=0}\left[\dfrac{\partial^2 V_{h+}}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 V_{h-}}{\partial x^2}\right]=8\pi\sigma_0\alpha\\ \lim\limits_{h=0}\left[\dfrac{\partial^2 V_{h+}}{\partial x\,\partial y}-\dfrac{\partial^2 V_{h-}}{\partial x\,\partial y}\right]=8\pi\sigma_0\beta\\ \lim\limits_{h=0}\left[\dfrac{\partial^2 V_{h+}}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 V_{h-}}{\partial y^2}\right]=8\pi\sigma_0\gamma\\ \lim\limits_{h=0}\left[\dfrac{\partial^2 V_{h+}}{\partial x\,\partial z}-\dfrac{\partial^2 V_{h-}}{\partial x\,\partial z}\right]=-4\pi a'\\ \lim\limits_{h=0}\left[\dfrac{\partial^2 V_{h+}}{\partial y\,\partial z}-\dfrac{\partial^2 V_{h-}}{\partial y\,\partial z}\right]=-4\pi b'\\ \lim\limits_{h=0}\left[\dfrac{\partial^2 V_{h+}}{\partial z^2}-\dfrac{\partial^2 V_{h-}}{\partial z^2}\right]=-8\pi\sigma_0(\alpha+\gamma).\end{cases}$$

Les valeurs correspondantes de la quantité $E'_{s_1 s_2}$ (330*) sont

(355)
$$\begin{cases}E'_{xx}=\lim\limits_{h=0}\displaystyle\int_0^{2\pi}(3\cos^2\vartheta-1)\,d\vartheta\int_h^a\sigma_1(r,\vartheta)\,\frac{dr}{r}\\ E'_{xy}=\lim\limits_{h=0}3\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\int_h^a\sigma_1(r,\vartheta)\,\frac{dr}{r}\\ E'_{yy}=\lim\limits_{h=0}\displaystyle\int_0^{2\pi}(3\sin^2\vartheta-1)\,d\vartheta\int_h^a\sigma_1(r,\vartheta)\,\frac{dr}{r}\\ E'_{xz}=\lim\limits_{h=0}3\sigma_0\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta\int_h^a\psi_1(r,\vartheta)\frac{dr}{r}\\ E'_{yz}=\lim\limits_{h=0}3\sigma_0\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_h^a\psi_1(r,\vartheta)\frac{dr}{r}\\ E'_{zz}=-\lim\limits_{h=0}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_h^a\sigma_1(r,\vartheta)\,\frac{dr}{r}.\end{cases}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Les changements brusques des dérivées secondes du potentiel prises suivant les axes sont donnés par les égalités* (354) *sans aucune autre hypothèse*

que celle que les constantes $\alpha\,\beta\,\gamma\,a'$ et b', définies par le système (334), *soient finies et déterminées, l'angle ψ'_0 étant supposé* $= 0$ *et l'axe des z étant dirigé suivant la normale. Pour que les limites des dérivées existent elles-mêmes, il faut et il suffit que les quantités correspondantes $E'_{s_1 s_2}$* (355) *soient finies et déterminées.*

Remarque V. Le système (354) est identique aux formules correspondantes de M. Poincaré,[1] les quantités $\sigma_0\; a'\; b'\; \alpha\; \beta\; \gamma$ ayant les mêmes sens que les quantités $\mu'\; \frac{\partial\frac{\mu'}{r'}}{\partial x'}\; \frac{\partial\frac{\mu'}{r'}}{\partial y'}\; \frac{1}{2}r_1\; \frac{1}{2}s_1$ et $\frac{1}{2}t_1$ de M. Poincaré. En effet, les formules (334) impliquent qu'on peut mettre l'équation de la surface sous la forme

$$z = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + r^2 f(x,y),\ \lim_{r=0} f(x,y) = 0\,. \tag{356}$$

Si on suppose que la fonction $f(xy)$ admette les dérivées premières et secondes par rapport à x et à y à l'origine, nous trouverons

$$r_1 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 = 2\alpha,\ \text{etc.}^{2}$$

Remarque VI. Les suppositions (334) que nous avons faites quant à la surface et à la densité peuvent être exprimées de la manière suivante:

1°. Au point P_0, la surface admet un plan tangent bien déterminé.

2°. Si ce plan est pris pour plan des xy, et si le point P_0 est pris pour origine, l'équation de la surface peut être mise sous la forme (356).

3°. L'élément de masse étant exprimé par la quantité $\sigma dxdy$, nous supposons que la fonction σ peut être mise sous la forme

$$\sigma = \sigma_0 + a'x + b'y + r\sigma_1(x,y),\ \lim_{r=0} \sigma_1(x,y) = 0, \tag{357}$$

$\sigma_0\; a'$ et b' étant des constantes.

4°. Pour que les limites des dérivées existent, il faut ajouter que les quantités $E'_{s_1 s_2}$ (355) correspondantes existent.

Remarque VII. L'équation (356) implique l'existence *au point* P_0 des dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, et exige qu'elles y soient $= 0$, mais elle n'exige pas que ces dérivées existent en des points du voisinage du point P_0, par suite il ne faut pas nécessairement que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ existent au point P_0.

[1] H. Poincaré l. c. p. 251.

[2] l. c. p. 245.

Pourtant, en tournant les axes dès x et des y de manière que $\beta = 0$, nous pourrons regarder les quantités 2α et 2γ comme les inverses d'une sorte de rayons de courbure principaux géométriques, si non analytiques. Quant à la fonction $f(x, y)$ de l'équation (356), nous n'avons pas supposé qu'elle admette une dérivée au point P_0, ni qu'elle soit continue dans le voisinage de ce point; nous avons supposé seulement qu'elle est continue au point P_0 et qu'elle y prend la valeur de zéro. Des considérations analogues se rattachent à l'égalité (357). Elle implique l'existence *au point* P_0 des deux dérivées $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ et $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$, etc.

Remarque VIII. Nous pourrons écrire (330*) pour $\nu_1 = \nu_2 = 0$

(358) $$E'^{(h)}_{s_1 s_2} = \int_0^{2\pi} (3 u_1^0 u_2^0 - c)\, d\vartheta \int_h^{(a)} \sigma_1(r, \vartheta) \frac{dr}{r} - \int_{(h)}^{(a)} r \sigma_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s_1 \partial s_2}\, d\omega,$$

et, en employant la méthode du § 3 δ), nous trouverons que

si la quantité $\frac{\partial r \sigma_1(x, y)}{\partial x}$ est intégrable, donc E'_{xx} et E'_{xy} existent,

» » » $\frac{\partial r \sigma_1(x, y)}{\partial y}$ » » » E'_{xy} » E'_{yy} » .

De plus nous pourrons écrire pour $\nu_1 = \lambda_2 = \mu_2 = 0$

(359) $$E'^{(h)}_{s_1 z} = \int_0^{2\pi} u_1^0\, d\vartheta \int_h^{a} \psi_1(r, \vartheta) \frac{dr}{r} - \int_{(h)}^{(a)} \psi_1(x, y) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1}\, d\omega,$$

et nous trouverons de même que

si la quantité $\frac{\partial \psi_1(x, y)}{\partial x}$ est intégrale, donc E'_{xz} existe, et

» » » $\frac{\partial \psi_1(x, y)}{\partial y}$ » » » E'_{yz} » .

Remarque IX. Par comparaison, nous donnerons ici les hypothèses qu'a fait M. Poincaré pour la déduction des mêmes formules (354).

I. La surface admet, au point P_0 et à tous les points du voisinage de P_0, un plan tangent bien déterminé (p. 235—236).

II. La densité μ' y est continue ainsi que ses dérivées premières et admet des dérivées secondes qui restent finies (p. 236). Les mêmes hypothèses sont faites quant à la quantité $\frac{\mu'}{\gamma'}$, où γ' est le cosinus de l'angle que fait la normale au point Q de la surface avec l'axe des z (p. 244). (Cette fonction $\frac{\mu'}{\gamma'}$ est la même que la fonction σ du chapitre présent). Par suite les dérivées premières de γ' sont finies et continues, et les dérivées secondes de γ' sont finies.

III. Si

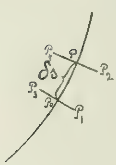
$$z' = f(x', y')$$

est l'équation de la surface, la fonction f admet au point P_0 et à tous les points du voisinage de P_0 les dérivées premières et secondes, de manière que tous ces points la surface a des rayons de courbure principaux (p. 245).

IV. Les suppositions II par rapport à μ' sont faites aussi par rapport à $\mu' p_1$, où $p_1 = \frac{\partial z'}{\partial x'}$ (p. 248, 249), de manière que la fonction $f(x' y')$ admet des dérivées troisièmes finies.

§ 45. *Théorème général. Application au cas de M. Poincaré.* S'il ne s'agit pas de déduire les valeurs des changements brusques considérés dans le § précédent sous des conditions les plus étendues, nous pourrons faire le calcul d'une manière beaucoup plus simple.[1] En effet, soit (fig. 9) s une courbe plane donnée quelconque qui admette une normale bien déterminée en tous ses points. Soient P_1 et P_2 deux points situés du même côté de la courbe infiniment près d'elle, P_3 et P_4 deux autres points situés de l'autre côté près de la courbe, de manière que les points P_1 et P_3 d'une part, P_2 et P_4 de l'autre, sont situés sur la même normale resp. Soient P_0 et P les points, où les droites $P_1 P_3$ et $P_2 P_4$ rencontrent la courbe, posons $P_0 P = \delta s$ et supposons $P_0 P_1 = P_0 P_3 = P P_2 = P P_4 = h$. Soit u une fonction donnée dans le plan, et supposons que la fonction u, ainsi que sa dérivée première prise parallèlement à l'élément δs, sont finies et continues dans cette même direction. Soient $u_1 u_2 u_3$ et u_4 les valeurs de u aux points $P_1 P_2 P_3$ et P_4 resp., et posons

Fig. 9.



$$v_h \delta s = (u_4 - u_3) - (u_2 - u_1), \tag{360}$$

$$\therefore\ v_h \delta s = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m_+} - \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m_-}\right] \delta s,$$

[1] Voir «Continuité et discontinuité des dérivées du potentiel». K. Vet. Akad. Öfvers. Stockholm 1901 pp. 644—647

$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m_+}$ étant une valeur moyenne de $\frac{\partial u}{\partial s}$ pour la courbe $P_3 P_4$; cette dérivée, ainsi que sa limite pour $h = 0$, est supposée continue,

$$\therefore\ v = \lim_{h=0} v_h = \lim_{h=0} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m_+},$$

$$\therefore \lim_{\partial s=0} v = \lim_{\partial s=0} \lim_{h=0} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m_+} = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_+ .$$

Des considérations analogues se rapportent à la quantité $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m_-}$

(361) $$\therefore \lim_{\partial s=0} v = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_+ - \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_-,$$

où $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_+$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_-$ sont les limites des valeurs de $\frac{\partial u}{\partial s}$ aux points P_3 et P_1 resp. De même on peut écrire

$$v_h \partial s = (u_4 - u_2) - (u_3 - u_1).$$

Posons

(362) $$\begin{cases} u_3 - u_1 = w_h^\circ \\ u_4 - u_2 = w_h, \\ \lim\limits_{h=0} u_4 = u_+,\ \lim\limits_{h=0} u_2 = u_-,\ \lim\limits_{h=0} w_h = w, \end{cases}$$

$$\therefore\ v = \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_m,$$

où $\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_m$ est une valeur moyenne de $\frac{\partial w}{\partial s}$. La dérivée $\frac{\partial w}{\partial s}$ étant supposée continue, nous trouverons

(363) $$\lim_{\partial s=0} v = \lim_{\partial s=0} \frac{\partial(u_+ - u_-)}{\partial s}.$$

Les égalités (361) et (363) donnent, pour le point P_0, la relation

(364) $$\frac{\partial(u_+ - u_-)}{\partial s} = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_+ - \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_- .$$

Soit maintenant l'équation de la surface attirante donnée par la formule

(365) $$z = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + r^2 f(x, y),\ \lim_{r=0} f = 0.$$

La normale au point P (xyz) fait avec les axes des angles, dont les cosinus directeurs lmn s'obtiennent par les formules

$$
(366) \quad \begin{cases} l = -2\alpha x - 2\beta y \\ m = -2\beta x - 2\gamma y \\ n = 1, \end{cases}
$$

où nous avons supposé que la fonction f admet, en chaque point du voisinage de l'origine P_0, des dérivées premières finies et que

$$
\lim_{r=0} r \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{r=0} r \frac{\partial f}{\partial y} = 0,
$$

et où nous avons supprimé les termes d'ordres supérieurs au premier par rapport aux coordonnées x et y. Prenons un système d'axes de coordonnées (x_1, y_1, z_1) par l'origine P_0, dont l'axe des z_1 est dirigé parallèlement à la normale qui passe par le point P, et dont les autres axes font des angles infiniment petits avec les axes des x et des y. Soient $(l' m' n')$, $(l'' m'' n'')$ et $(l m n)$ les cosinus directeurs des axes des x_1, des y_1 et des z_1 resp., et soit $W(x, y, z)$ une fonction des coordonnées $(x y z)$ qui reste finie et continue ainsi que ses premières et secondes dérivées pour chaque côté de la surface, mais nous supposons que ses dérivées premières peuvent éprouver des changements brusques en traversant la surface. Posons

$$
(367) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)_+ - \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)_- = \xi \\ \left(\frac{\partial W}{\partial y_1}\right)_+ - \left(\frac{\partial W}{\partial y_1}\right)_- = \eta \\ \left(\frac{\partial W}{\partial z_1}\right)_+ - \left(\frac{\partial W}{\partial z_1}\right)_- = \zeta. \end{cases}
$$

D'autre part nous avons

$$
(368) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x_1} l' + \frac{\partial W}{\partial y_1} l'' + \frac{\partial W}{\partial z_1} l \\ \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial x_1} m' + \frac{\partial W}{\partial y_1} m'' + \frac{\partial W}{\partial z_1} m \\ \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x_1} n' + \frac{\partial W}{\partial y_1} n'' + \frac{\partial W}{\partial z_1} n, \end{cases}
$$

$$
(369) \quad \begin{cases} \therefore \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_- = l' \xi + l'' \eta + l \zeta \\ \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_+ - \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_- = m' \xi + m'' \eta + m \zeta \\ \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_+ - \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_- = n' \xi + n'' \eta + n \zeta. \end{cases}
$$

De l'égalité (364) nous conclurons

$$(370)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_+^0 - \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_-^0 = \lim\limits_{x=0} \dfrac{\partial}{\partial x}(u_+ - u_-)_{y=0} \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_+^0 - \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_-^0 = \lim\limits_{y=0} \dfrac{\partial}{\partial y}(u_+ - u_-)_{x=0}\,, \end{cases}$$

où $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_+^0$ est la valeur de $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_+$ à l'origine prise du côté des z positifs, etc. Si dans les egalités (370) nous substituons à la fonction u successivement les fonctions $\dfrac{\partial W}{\partial x}$, $\dfrac{\partial W}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial W}{\partial z}$, nous trouverons

$$(371)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_+^0 - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_-^0 = \lim\limits_{x=0} \dfrac{\partial}{\partial x}(l'\xi + l''\eta + l\zeta)_{y=0} = \lim\limits_{x=0}\left[\dfrac{\partial l''}{\partial x}\eta + \dfrac{\partial l}{\partial x}\zeta\right]_{y=0} + \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_+^0 - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)_-^0 = \lim\limits_{x=0} \dfrac{\partial}{\partial x}(m'\xi + m''\eta + m\zeta)_{y=0} = \lim\limits_{x=0}\left[\dfrac{\partial m'}{\partial x}\xi + \dfrac{\partial m}{\partial x}\zeta\right]_{y=0} + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}\right)_+^0 - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z}\right)_-^0 = \lim\limits_{x=0} \dfrac{\partial}{\partial x}(n'\xi + n''\eta + n\zeta)_{y=0} = \lim\limits_{x=0}\left[\dfrac{\partial n'}{\partial x}\xi + \dfrac{\partial n''}{\partial x}\eta\right]_{y=0} + \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial x}\right)_+^0 - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial x}\right)_-^0 = \lim\limits_{y=0} \dfrac{\partial}{\partial y}(l'\xi + l''\eta + l\zeta)_{x=0} = \lim\limits_{y=0}\left[\dfrac{\partial l''}{\partial y}\eta + \dfrac{\partial l}{\partial y}\zeta\right]_{x=0} + \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)^0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_+^0 - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_-^0 = \lim\limits_{y=0} \dfrac{\partial}{\partial y}(m'\xi + m''\eta + m\zeta)_{x=0} = \lim\limits_{y=0}\left[\dfrac{\partial m'}{\partial y}\xi + \dfrac{\partial m}{\partial y}\zeta\right]_{x=0} + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)^0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}\right)_+^0 - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z}\right)_-^0 = \lim\limits_{y=0} \dfrac{\partial}{\partial y}(n'\xi + n''\eta + n\zeta)_{x=0} = \lim\limits_{y=0}\left[\dfrac{\partial n'}{\partial y}\xi + \dfrac{\partial n''}{\partial y}\eta\right]_{x=0} + \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^0. \end{cases}$$

Si nous avons donné de plus

$$(372)\quad \Delta W = \varphi,$$

$$\therefore (\Delta W)_+ - (\Delta W)_- = \varphi_+ - \varphi_-,$$

nous tirons

$$(373)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_+^0 - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_-^0 = \varphi_+^0 - \varphi_-^0 - \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^0 - \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)^0 \\ \qquad\qquad - \lim\limits_{x=0}\left(\dfrac{\partial l''}{\partial x}\eta + \dfrac{\partial l}{\partial x}\zeta\right)_{y=0} - \lim\limits_{y=0}\left(\dfrac{\partial m'}{\partial y}\xi + \dfrac{\partial m}{\partial y}\zeta\right)_{x=0}. \end{cases}$$

Des égalités

$$(374)\quad \begin{cases} l'l'' + m'm'' + n'n'' = 0 \\ l'l + m'm + n'n = 0 \\ l''l + m''m + n''n = 0 \\ l' = m'' = n = 1 \end{cases}$$

nous tirons

$$(375)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial l''}{\partial x} + \dfrac{\partial m'}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial l''}{\partial y} + \dfrac{\partial m'}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial l}{\partial x} + \dfrac{\partial n'}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial l}{\partial y} + \dfrac{\partial n'}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial m}{\partial x} + \dfrac{\partial n''}{\partial x} = 0 & \dfrac{\partial m}{\partial y} + \dfrac{\partial n''}{\partial y} = 0 . \end{cases}$$

Si nous supposons que la fonction f (365) admet les dérivées secondes, nous obtenons (375 et 366)

$$(376)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial l''}{\partial x} = -\dfrac{\partial m'}{\partial x}, & \dfrac{\partial l''}{\partial y} = -\dfrac{\partial m'}{\partial y} \\ \dfrac{\partial n'}{\partial x} = -\dfrac{\partial l}{\partial x} = 2\alpha & \dfrac{\partial n'}{\partial y} = -\dfrac{\partial l}{\partial y} = 2\beta \\ \dfrac{\partial n''}{\partial x} = -\dfrac{\partial m}{\partial x} = 2\beta & \dfrac{\partial n''}{\partial y} = -\dfrac{\partial m}{\partial y} = 2\gamma . \end{cases}$$

D'où le resultat

$$(377)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_- = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} - \eta\dfrac{\partial m'}{\partial x} - 2\alpha\zeta & \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_- = \xi\dfrac{\partial m'}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} - 2\gamma\zeta \\ \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)_- = \xi\dfrac{\partial m'}{\partial x} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x} - 2\beta\zeta & \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}\right)_- = \dfrac{\partial \xi}{\partial y} - \eta\dfrac{\partial m'}{\partial y} - 2\beta\zeta \\ \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}\right) = 2\alpha\xi + 2\beta\eta + \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} & \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right) = 2\beta\xi + 2\gamma\eta + \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_- = \varphi_+ - \varphi_- - \dfrac{\partial \xi}{\partial x} - \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + 2(\alpha+\gamma)\zeta + \eta\dfrac{\partial m'}{\partial x} - \xi\dfrac{\partial m'}{\partial y}, & \end{cases}$$

où nous avons supprimé l'indice o, quoique ces formules (377) se rapportent à l'origine P_0, et où $\dfrac{\partial m'}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial m'}{\partial y}$ sont écrites pour $\lim\limits_{x=0}\left(\dfrac{\partial m'}{\partial x}\right)_{y=0}$ et $\lim\limits_{y=0}\left(\dfrac{\partial m'}{\partial y}\right)_{x=0}$ resp.

Remarque I. Dans le système (377) la quantité infiniment petite m' reste arbitraire. Dans le cas de la courbe $y = 0$ (371) on peut choisir l'axe des x_1 dans le plan des xz, et dans ce cas on aura $m' = l' = 0$, et ce même résultat on retrouvera dans le cas $x = 0$,

$$(378)\qquad \therefore\ m' = \frac{\partial m'}{\partial x} = \frac{\partial m'}{\partial y} = 0 .$$

Remarque II. Si l'on pose

$$\xi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad m' = 0,$$

on trouvera que le saut brusque de $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ est égal à celui de $\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}$.

Si nous appliquons les formules générales (377) au potentiel d'une simple couche, nous n'aurons qu'à poser (199)

$$\begin{cases} \xi = \eta = \varphi = 0, \\ \zeta = -4\pi\mu, \ \mu = \sigma n, \end{cases} \tag{379}$$

et nous retrouverons les formules (354) en posant

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 = a', \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)_0 = b'.$$

Remarque III. Quant aux hypothèses que nous avons faites ici, elles sont presque identiques à celles de M. Poincaré. En effet, nous avons supposé 1° que la fonction z admet les dérivées du second ordre et que celles-ci sont continues; 2° que la fonction σ admet les dérivées du premier ordre et que celles-ci sont continues; enfin 3° que les fonctions z et σ sont telles que les limites des dérivées existent et soient continues, ce qui est le cas par ex. si les dérivées troisièmes de z et les dérivées secondes de σ existent (cfr § 44 rem. VIII).

CHAPITRE VI.

Double couche.

§ 46. *La fonction W_h, sa définition et sa valeur limite.* Nous definirons une fonction W_h des coordonnées d'un point P, extérieur à une surface donnée, par la formule (cfr. 203)

$$(380)\quad \begin{cases} W_h = -\left(\dfrac{\partial U_1}{\partial x} + \dfrac{\partial U_2}{\partial y} + \dfrac{\partial U_3}{\partial z}\right) \\ U_1 = \displaystyle\int l\sigma \frac{d\omega}{R} \\ U_2 = \displaystyle\int m\sigma \frac{d\omega}{R} \\ U_3 = \displaystyle\int n\sigma \frac{d\omega}{R} \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1\,, \end{cases}$$

où les quantités lmn sont des fonctions des coordonnées du point Q de la surface, et nous supposons qu'elles sont continues par rapport à r au point P_0. Si nous posons

$$(381)\quad \begin{cases} u = l \cos\psi \cos\vartheta + m \cos\psi \sin\vartheta + n \sin\psi \\ u' = \lambda' \cos\psi \cos\vartheta + \mu' \cos\psi \sin\vartheta + \nu' \sin\psi \\ c' = \lambda' l + \mu' m + \nu' n\,, \end{cases}$$

où $\lambda' \mu' \nu'$ sont les cosinus directeurs de la droite $P_0 P$, nous trouverons (222)

$$(382)\quad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} W_h = - W_s - Q' \\ \qquad W_s = \lim\limits_{h=0} W_s^{(h)} \\ \qquad W_s^{(h)} = \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma(r, \vartheta) u \cos^2\psi \frac{dr}{r} \\ \qquad Q' = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \left\{ \frac{u_0 - c_0'}{1 - u_0'} - 2 u_0 - u_0 \log\left[\frac{1 - u_0'}{2} \cos\psi_0\right]\right\} \cos^2\psi_0 \, d\vartheta, \end{cases}$$

où $c_0' = \lim\limits_{r=0} c'$, etc. D'où le théorème:

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de* $\lim_{h=0} W_h$ *est que la quantité* W_s *existe* (382).

Nous définirons une fonction W pour un point de la surface de la manière suivante:

(380*) $$W = -\int l\sigma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} d\omega - \int m\sigma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y} d\omega - \int n\sigma \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} d\omega ,$$

$\therefore$ (208)

(383) $$\begin{cases} W = -W_s - Q \\ Q = -\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left\{1 + u_0 + u_0 \log\left[\frac{1 - u_0}{2}\cos\psi_0\right]\right\}\cos^2\psi_0\, d\vartheta , \end{cases}$$

où la quantité W_s est définie dans les formules (382). Par suite, la quantité W existe en même temps que $\lim_{h=0} W_h$. Si W_s existe, on trouvera

(384) $$\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) u_0 \cos^2\psi_0\, d\vartheta = 0 .$$

Corollaire. Pour $\lambda' = l_0$, $\mu' = m_0$ et $\nu' = n_0$, on aura $u'_0 = u_0$ et $c'_0 = 1$

(385) $$\therefore \lim_{h=0} W_h - W = -\int\limits_0^{2\pi} \sigma_0 u_0 \cos^2\psi_0\, d\vartheta = 0 .$$

Si les quantités $l\ m\ n$ sont les cosinus directeurs de la normale de la surface au point Q, la fonction W_h est le potentiel d'une *double couche*,[1] dont le moment est

(386) $$\mu = n\sigma .$$

Par suite, si on change la direction positive de l'axe des z et si le point P traverse la surface, il faut non seulement changer les quantités ψ, λ' et μ' en $-\psi$, $-\lambda'$ et $-\mu'$ resp., mais aussi les quantités σ, l et m en $-\sigma$, $-l$ et $-m$ resp. Nous supposerons dans la suite que la fonction W_h se comporte comme le potentiel d'une double couche, les fonctions l, m, n étant des fonctions quelconques satisfaisant à la relation

(387) $$l^2 + m^2 + n^2 = 1 .$$

Si on change la direction positive de l'axe des z, et si le point P traverse la surface suivant une droite, la fonction W_h change de W_{h+} en W_{h-}, et les quantités u et u' en $-u$ et $-u'$ resp., pendant que la quantité c' ne change pas (381). Nous trouverons (382)

[1] Voir H. Poincaré l. c. p. 218.

(388) $$\lim_{h=0}(W_{h+} - W_{h-}) = -Q'_+ + Q'_-,$$

Q'_- étant ce que deviendra Q' (382), lorsqu'on y remplace σ_0, u_0 et u'_0 par $-\sigma_0$, $-u_0$ et $-u_0'$ resp.

Nous pourrons traiter la fonction W d'une manière analogue, et nous trouverons

(389) $$W_+ - W_- = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[2 + u_0 \log \frac{1-u_0}{1+u_0}\right]\cos^2 \psi'_0 \, d\vartheta.$$

Remarque I. L'égalité (388) aura lieu même dans le cas où $\lim_{h=0} W_h$ n'existe pas.

Cas particuliers. I. *Point régulier.* Si $\psi'_0 = 0$, on trouvera pour le potentiel d'une double couche

(390) $$l_0 = m_0 = 0, \; n_0 = 1$$

(391) $$\begin{cases} \lim_{h=0}(W_{h+} - W_{h-}) = 2\nu' \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta) \dfrac{d\vartheta}{1 - u_0'^2} \\ W_+ - W_- = 2\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, d\vartheta. \end{cases}$$

Soit $\sigma_0 =$ une constante σ_1 pour $0 \leq \vartheta \leq \pi$, et
$=$ » » σ_2 » $\pi < \vartheta < 2\pi$,

donc (201) pour $\nu' = 0$

(392) $$\begin{cases} \lim_{h=0}(W_{h+} - W_{h-}) = 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2) \\ \qquad = W_+ - W_-. \end{cases}$$

II. *Point conique.* Si $\psi'_0 =$ const., on trouvera pour le potentiel d'une double couche

(393) $$\begin{cases} l_0 = -\sin\psi'_0 \cos\vartheta, \; m_0 = -\sin\psi'_0 \sin\vartheta, \; n_0 = \cos\psi'_0 \\ u_0 = 0, \; c_0' = \operatorname{tg}\psi'_0(1 - u_0') + \dfrac{\nu' - \sin\psi'_0}{\cos\psi'_0} \\ \therefore Q' = -\cos\psi'_0 \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[\sin\psi'_0 + \dfrac{\nu' - \sin\psi'_0}{1 - u_0'}\right] d\vartheta, . \end{cases}$$

$$
(394)\quad \begin{cases} \therefore \text{ pour } \sigma_0' = \text{const. et } \nu' > \sin\psi_0,\ Q' = -2\pi\sigma_0\cos\psi_0[\sin\psi_0 + 1], \text{ et} \\ \quad\text{»}\qquad\text{»}\qquad\text{»}\qquad\text{»}\ \nu' < \sin\psi_0,\ Q' = -2\pi\sigma_0\cos\psi_0[\sin\psi_0 - 1], \\ \therefore \lim\limits_{h=0}(W_{h+} - W_{h-}) = 4\pi\sigma_0\cos\psi_0. \end{cases}
$$

De même nous trouverons pour $u_0 = 0$ et $\sigma_0 = \text{const.}$

$$
(395)\quad \begin{cases} Q = -2\pi\sigma_0\cos^2\psi_0, \\ \therefore\ W_+ - W_- = 4\pi\sigma_0\cos^2\psi_0, \end{cases}
$$

$$
(396)\quad \therefore \lim_{h=0}(W_{h+} - W_{h-}) = (W_+ - W_-)\frac{1}{\cos\psi_0}.
$$

Remarque II. Les seconds membres des égalités (394, 395, 396) sont indépendants de la direction de la droite P_0P.

§ **47.** *La limite de la dérivée première de la fonction* W_h. Des formules (380) nous tirons

$$
(397)\quad \frac{\partial W_h}{\partial s} = -\left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial s\,\partial x} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial s\,\partial y} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial s\,\partial z}\right] = \lambda\frac{\partial W}{\partial x} + \mu\frac{\partial W}{\partial y} + \nu\frac{\partial W}{\partial z}.
$$

$\lambda\mu\nu$ étant les cosinus directeurs de l'élément ds. Posons

$$
(398)\quad \begin{cases} u_1 = \lambda\cos\psi\cos\vartheta + \mu\cos\psi\sin\vartheta + \nu\sin\psi = \cos(ds, P_0Q) \\ u_2 = l\cos\psi\cos\vartheta + m\cos\psi\sin\vartheta + n\sin\psi = \cos(N, P_0Q) \\ u' = \lambda'\cos\psi\cos\vartheta + \mu'\cos\psi\sin\vartheta + \nu'\sin\psi = \cos(h, P_0Q) \\ c_1 = \lambda'\lambda + \mu'\mu + \nu'\nu = \cos(ds, h) \\ c_2 = \lambda' l + \mu' m + \nu' n = \cos(N, h) \\ c = \lambda l + \mu m + \nu n = \cos(ds, N) \\ 3(u_1 q - c_1)(u_2 q - c_2)\dfrac{1}{q'^2} - c = f \\ q' = \sqrt{q^2 - 2qu' + 1} \\ q = \dfrac{t}{\cos\psi}, \end{cases}
$$

où N est le vecteur (lmn) et $h = P_0P$. Nous trouverons [illegible]

$$
(399)\quad \frac{\partial W_h}{\partial s} = -\frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma f \frac{t\,dt}{q'^3}.
$$

Supposons que les quantités $\sigma\,\psi\,l\,m\,n$ soient, au point P_0, continues par rapport à r, et soient

$$(400)\qquad \begin{cases} \sigma_0(\vartheta) = \lim\limits_{r=0} \sigma(r, \vartheta) \text{ etc.}, \ u^0_{2\,0} = \lim\limits_{r=0} u_2, \text{ et posons} \\ u_2^0 = l \cos\psi_0 \cos\vartheta + m \cos\psi_0 \sin\vartheta + n \sin\psi_0 \\ f_1 = (3\,u_1^0 q_0 - c_1)(3\,u_2^0 q_0 - c_2)\dfrac{1}{q'^2_0} - c\,. \end{cases}$$

Nous pourrons écrire

$$(401)\qquad \frac{\sigma f}{q'^3} = \frac{\sigma_0 f_0}{q'^3_0} + \frac{\sigma_0}{q'^3_0}(f_1 - f_0) + \sigma_0\left(\frac{f}{q'^3} - \frac{f_1}{q'^3_0}\right) + (\sigma - \sigma_0)\frac{f}{q'^3}\,,$$

$$\therefore\ \frac{\partial W_h}{\partial s} = \frac{1}{h} I_1 + \frac{1}{h} I_2 + \frac{1}{h} I_3 + \frac{1}{h} I_4\,,$$

$I_1 I_2$, etc. étant les intégrales qui correspondent aux divers termes du second membre de l'égalité (401),

$$\therefore\ \frac{1}{h} I_1 = -\frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0\,d\vartheta\int_0^{\infty}\frac{f_0}{q'^3_0}\,tdt + \frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0\,d\vartheta\int_{\frac{a}{h}}^{\infty}\frac{f_0}{q'^3_0}\,tdt \equiv \frac{1}{h} I' + \frac{1}{h} I''.$$

Mais

$$\lim_{h=0}\,(I'' + I_2 + I_3 + I_4) = 0\,,$$

$\therefore$ pour que $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ soit finie, il faut que

$$(402)\qquad I' \equiv -\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_0^{\infty}\frac{f_0}{q'^3_0}\,tdt = 0\,,$$

et cette égalité est identique à la condition (326),

$$(402^*)\qquad \begin{cases} \therefore\ I' = -\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,A\,\cos^2\psi_0\,d\vartheta \\ A = \dfrac{(u_1^0 - c_1)(u^0_{2\,0} - c_2^0)}{(1 - u'_0)^2} + \dfrac{u_1^0 u^0_{2\,0} - c_0}{1 - u'_0}\,. \end{cases}$$

De plus nous trouverons

(403) $$\lim_{h=0} I'' = \frac{1}{a}\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3\,u_1^0\,u_{2\,0}^0 - c_0)\cos^3\psi_0\,d\vartheta\,.$$

Posons

(404) $$\begin{cases} l = l_0(\vartheta) + r\bar{l}(r,\vartheta),\ \ m = m_0(\vartheta) + r\bar{m}(r,\vartheta),\ \ n = n_0(\vartheta) + r\bar{n}(r,\vartheta) \\ \sigma = \sigma_0(\vartheta) + r\bar{\sigma}(r,\vartheta),\ \ \psi = \psi_0(\vartheta) + r\bar{\psi}(r,\vartheta), \end{cases}$$

où $l_0(\vartheta) = \lim_{r=0} l(r,\vartheta)$, etc. Nous trouverons

(405) $$\begin{cases} \frac{1}{h} I_2 = I_N^{(h)} + E_N^{(h)} \\ I_N^{(h)} = -\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_0^1 f\,\frac{t^2 dt}{q_0'^3} - \int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_1^{\frac{a}{h}}\left\{\frac{f t^2}{q_0'^3} - \frac{3\,u_1^0 u_2^0 - c}{t}\cos^3\psi_0\right\}dt \\ E_N^{(h)} = -\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_h^a (3\,u_1 u_2^0 - \bar{c})\cos^3\psi_0\,\frac{dr}{r} \\ f = 3(u_1^0 q_0 - c_1)(\bar{u}_2^0 q_0 - \bar{c}_2)\frac{1}{q_0'^2} - \bar{c} \\ \bar{u}_2^0 = \bar{l}\cos\psi_0\cos\vartheta + \bar{m}\cos\psi_0\sin\vartheta + \bar{n}\sin\psi_0 \\ \bar{c}_2 = \lambda'\bar{l} + \mu'\bar{m} + \nu'\bar{n} \\ \bar{c} = \lambda\bar{l} + \mu\bar{m} + \nu\bar{n}, \end{cases}$$

(406) $$\begin{cases} \frac{1}{h} I_3 = I_\psi^{(h)} + E_\psi^{(h)} \\ I_\psi^{(h)} = -\frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_0^1\left(\frac{f}{q'^3} - \frac{f_1}{q_0'^3}\right)t\,dt - \frac{1}{h}\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_1^{\frac{a}{h}}\left\{\frac{ft}{q'^3} - \frac{f_1 t}{q'_0}\right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{3\,u_1 u_2 - c}{t^2}\cos^3\psi + \frac{3\,u_1^0 u_2^0 - c}{t^2}\cos^3\psi_0\right\}dt \\ E_\psi = -\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)\,d\vartheta\int_h^a\{(3\,u_1 u_2 - c)\cos^3\psi - (3\,u_1^0 u_2^0 - c)\cos^3\psi_0\}\frac{dr}{r^2}, \end{cases}$$

et

$$(407)\begin{cases} \frac{1}{h} I_4 = I_\sigma^{(h)} + E_\sigma^{(h)} \\ I_\sigma^{(h)} = -\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \sigma f \frac{t^2 dt}{q'^3} - \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \sigma \left\{ \frac{ft^2}{q'^3} - \frac{3 u_1 u_2 - c}{t} \cos^3 \psi \right\} dt \\ E_\sigma^{(h)} = -\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \bar{\sigma}(r, \vartheta)(3 u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi \frac{dr}{r}. \end{cases}$$

Posons

$$(408)\quad \begin{cases} I_s^{(h)} = I_N^{(h)} + I_\psi^{(h)} + I_\sigma^{(h)} \\ E_s^{(h)} = E_N^{(h)} + E_\psi^{(h)} + E_\sigma^{(h)}, \end{cases}$$

$$(409)\begin{cases} \therefore \frac{\partial W_h}{\partial s} = E_s^{(h)} + I_s^{(h)} + \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3 u_1^0 u_{20}^0 - c_0) \cos^3 \psi_0 d\vartheta + \eta_h, \lim_{h=0} \eta_h = 0 \\ E_s^{(h)} = -\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \{\sigma(r, \vartheta)(3 u_1 u_2 - c) \cos^3 \psi - \sigma_0(\vartheta)(3 u_1^0 u_{20}^0 - c_0) \cos^3 \psi_0\} \frac{dr}{r^2}. \end{cases}$$

Nous supposons (cfr. 404)

$$(410)\begin{cases} \lim_{r=0} \bar{\sigma}(r, \vartheta) \text{ finie, posons } \bar{\sigma}(r, \vartheta) = \bar{\sigma}_0(\vartheta) + \sigma_1(r, \vartheta), \lim_{r=0} \sigma_1 = 0 \\ \lim_{r=0} \bar{\psi}(r, \vartheta) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \bar{\psi}(r, \vartheta) = \psi_0(\vartheta) + \psi_1(r, \vartheta), \lim_{r=0} \psi_1 = 0 \\ \lim_{r=0} l(r, \vartheta) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad l(r, \vartheta) = l_0(\vartheta) + l_1(r, \vartheta), \lim_{r=0} l_1 = 0 \\ \lim_{r=0} m(r, \vartheta) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad m(r, \vartheta) = m_0(\vartheta) + m_1(r, \vartheta), \lim_{r=0} m_1 = 0, \\ \therefore (387) \lim_{r=0} n(r, \vartheta) \quad \text{»} \quad \text{»} \quad n(r, \vartheta) = n_0(\vartheta) + n_1(r, \vartheta), \lim_{r=0} n_1 = 0, \text{ si } n \neq 0, \end{cases}$$

$$(411)\quad \therefore (387) \begin{cases} l_0^2 + m_0^2 + n_0^2 = 1 \\ l_0 \bar{l}_0 + m_0 \bar{m}_0 + n_0 n_0 = 0 \\ l_0 l_1 + m_0 m_1 + n_0 n_1 + \frac{r}{2} (l^2 + \bar{m}^2 + \bar{n}^2) = 0. \end{cases}$$

Donc nous trouverons

$$(412)\qquad \begin{cases} I_N = \lim\limits_{h=0} I_N^{(h)} = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\overline{A}\cos^2\psi_0\, d\vartheta \\ I_\psi = \lim\limits_{h=0} I_\psi^{(h)} = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\overline{\psi}_0(\vartheta) E\cos^2\psi_0\, d\vartheta \\ I_\sigma = \lim\limits_{h=0} I_\sigma^{(h)} = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma(\vartheta) A'\cos^3\psi_0\, d\vartheta, \end{cases}$$

où $\overline{A}$ a le même sens que A' de la formule (327) pour $\lambda_2 = l_0$, $\mu_2 = m_0$, $\nu_2 = n_0$,

E » » » » » E » » » (324), et

A' » » » » » $\overline{A}'$ » » » (327),

∴ (409), (412)

$$(413)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s} = E_s + I_s + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3\,u_1^0 u_{2\,0}^0 - c_0)\cos^3\psi_0\, d\vartheta \\ E_s = \lim\limits_{h=0} E_s^{(h)} \\ I_s = I_N + I_\psi + I_\sigma. \end{cases}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Pour que* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ *soit finie, il faut toujours que la condition (402*) soit remplie. Dans le cas particulier, défini par les formules (410), il faut de plus et il suffit pour l'existence de* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s}$ *que la quantité* E_s *(413) existe.*

Remarque I. On peut écrire

$$(414)\qquad I_N + I_\sigma = -\int_0^{2\pi} \overline{\sigma}(\vartheta)\,\overline{\overline{A}}\cos^3\psi_0\, d\vartheta,$$

$\overline{\overline{A}}$ étant ce que deviendra A' de la formule (327), lorsqu'on y remplace $\lambda_2\mu_2\nu_2$ par $l_0\overline{m}_0\overline{n}_0$ resp., où

$$(415)\qquad \overline{\sigma}_0\overline{l}_0 = \sigma_0 l_0 + \sigma_0 l_0,\ \ \overline{\sigma}_0\overline{m}_0 = \sigma_0 m_0 + \sigma_0 m_0,\ \ \overline{\sigma}_0\overline{n}_0 = \sigma_0 n_1 + \sigma_0 n_0.$$

Corollaire. La condition que la quantité E_s doit être finie peut être remplacée par les deux conditions suivantes (cfr. 330):

$$(416)\quad \begin{cases} F_s \equiv -\displaystyle\int_0^{2\pi} \{ \bar{\bar{\sigma}}_0(\vartheta)(3 u_1^0 \bar{\bar{u}}_{20}^0 - \bar{\bar{c}}_0) \cos \psi_0 + 3\sigma_0(\vartheta)\, \bar{\psi}_0(\vartheta)\, C^0 \} \cos^2 \psi_0 \, d\vartheta = 0 \\ E'_s \equiv \lim\limits_{h=0} E'^{(h)}_s = \text{une quantité finie,} \\ \text{où} \\ C^0 = \nu u_{20}^0 + n_0 u_1^0 + (c_0 - 5 u_1^0 u_{20}^0) \sin \psi_0 \\ E'^{(h)}_s = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 \psi_0 \, d\vartheta \int_h^a \{ \sigma^1(r, \vartheta)(3 u_1^0 u_2^{10} - c^1) \cos \psi_0 + 3\sigma_0(\vartheta)\, \psi_1(r, \vartheta)\, C^0 \} \frac{dr}{r}, \end{cases}$$

et

$$(417)\quad \begin{cases} \sigma^1 l^1 \equiv \sigma_0 l_1 + \sigma_1 l_0 \ \text{etc.} \\ c^1 \equiv \lambda l^1 + \mu m^1 + \nu l^1 \\ u_2^{10} = l^1 \cos \psi_0 \cos \vartheta + m^1 \cos \psi_0 \sin \vartheta + n^1 \sin \psi_0 . \end{cases}$$

Le cas où le point P est situé dans la surface peut être traité de la même manière. Nous trouverons

$$(418)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial s} = E_s + J_s + \dfrac{1}{a} \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)(3 u_{10} u_{20}^0 - c_0) \cos^3 \psi_0 \, d\vartheta \\ J_s = J_N + J_\psi + J_\sigma \\ J_N = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \bar{B} \cos^3 \psi_0 \, d\vartheta \\ J_\psi = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, \psi_0(\vartheta)\, \Gamma \cos^2 \psi_0 \, d\vartheta \\ J_\sigma = -\displaystyle\int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)\, B \cos^3 \psi_0 \, d\vartheta \end{cases}$$

sous la condition

$$(419)\qquad Q'_s = Q_s,$$

où B a le même sens que $\Gamma_{s's}$ de la formule (315) pour $u_0 = \bar{u}^0_{20}$, $u'_0 = u^0_1$, $c' = \bar{c}_0$

Γ » » » » » $\Gamma^0_{s's}$ » » » (310) » $u_0 = u^0_{20}$, $u'_0 = u^0_1$, $c' = c_0$, $\nu' = \nu_1$ et $\nu = n_0$

B » » » » » $\Gamma_{s's}$ » » » (315) » $u_0 = \bar{u}^0_{20}$, $u'_0 = u^0_1$, $c' = c_0$, $\nu' = \nu_1$ et $\nu = n_0$.

Corollaire. Pour $\lambda' = \lambda = l_0$, $\mu' = \mu = m_0$ et $\nu' = \nu = n_0$, nous trouverons (cfr. 333 et 416)

$$\lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial s} - \frac{\partial W}{\partial s} = F_s. \tag{420}$$

Le changement brusque de la dérivée, lorsque le point P traverse la surface, s'obtient en changeant les quantités σ, ψ, λ', μ', l, m et ν en $-\sigma$, $-\psi$, $-\lambda'$, $-\mu'$, $-l$, $-m$ et $-\nu$ resp., $\therefore$ u_2, u', c_1 et c changent en $-u_2$, $-u'$, $-c_1$ et $-c$ resp., pendant que u_1 et c_2 restent les mêmes. En désignant les deux côtés de la surface par les signes $+$ et $-$, nous trouverons (409) dans le cas général

$$E_s^{h+} = E_s^{h-}. \tag{421}$$

Dans le cas plus particulier (410), nous aurons (413)

$$\tag{422} \left\{ \begin{aligned} &\lim_{h=0}\left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \frac{\partial W_{h-}}{ds}\right] = -\int_0^{2\pi} \{[\sigma_0(\vartheta)\bar{A}_+ + \bar{\sigma}_0(\vartheta)A'_+] + [\sigma_0(\vartheta)\bar{A}_- + \bar{\sigma}_0(\vartheta)A'_-]\} \,. \\ &\qquad . \cos^3\psi_0\, d\vartheta - \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\,\bar{\psi}_0(\vartheta)\,(E_+ - E_-)\cos^2\psi_0\, d\vartheta, \end{aligned} \right.$$

sous la condition (cfr. 402*)

$$I'_+ = I'_-. \tag{423}$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Dans le cas défini par les suppositions* (410), $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_{h+}}{\partial s}$ *est finie ou infinie en même temps que* $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_{h-}}{\partial s}$, *pourvu que l'égalité* (423) *soit satisfaite.*

Remarque II. On trouvera de même (418)

$$\frac{\partial W_+}{\partial s} - \frac{\partial W_-}{\partial s} = J_{s+} - J_{s-}, \tag{424}$$

pourvu que

(425) $$Q'_{s+} - Q_{s+} = Q'_{s-} - Q_{s-}.$$

Cas particuliers. *I. Point régulier.* Supposons

(426) $$\begin{cases} \psi_0 = 0, \ \sigma_0 = \text{une constante} \\ \sigma_0 \bar{l}_0 + \bar{\sigma}_0 l_0 = a_1 \cos\vartheta + b_1 \sin\vartheta \\ \sigma_0 \bar{m}_0 + \bar{\sigma}_0 m_0 = a_2 \cos\vartheta + b_2 \sin\vartheta \\ \sigma_0 \bar{n}_0 + \bar{\sigma}_0 n_0 = a_3 \cos\vartheta + b_3 \sin\vartheta \\ \psi'_0(\vartheta) = \alpha \cos^2\vartheta + 2\beta \cos\vartheta \sin\vartheta + \gamma \sin^2\vartheta . \end{cases}$$

Donc nous trouverons (cfr. 402*, 416, 413, 338 et 335)

(427) $$\begin{cases} I' = F_s = 0 \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial s} = E_s + I_s + \dfrac{\pi}{a}(c_0 - 3\,\nu n_0) \\ I_s = -4\pi\sigma_0\lambda(\alpha l_0 + \beta m_0) - 4\pi\sigma_0\mu(\beta l_0 + \gamma m_0) + 4\pi\sigma_0 \nu n_0(\alpha + \gamma) + \\ \qquad + 2\pi(\lambda a_3 + \mu b_3) + 2\pi\nu(a_1 + b_2), \end{cases}$$

et la seule condition à remplir est celle que la quantité E'_s (416) doit être finie. De plus nous trouverons

(428) $$\begin{cases} \lim\limits_{h=0}\left[\dfrac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \dfrac{\partial W_{h-}}{\partial s}\right] = -8\pi\sigma_0\lambda(\alpha l_0 + \beta m_0) - 8\pi\sigma_0\mu(\beta l_0 + \gamma m_0) + 8\pi\sigma_0\nu n_0(\alpha + \\ \qquad + \gamma) + 4\pi(\lambda a_3 + \mu b_3) + 4\pi\nu(a_1 + b_2). \end{cases}$$

Remarque III. L'égalité (428) aura lieu sans condition additionnelle. Mais pour que les deux limites existent elles-mêmes, il faut de plus et il suffit que la quantité E'_s (416) soit finie.

II. Point conique. Si ψ_0 = une constante, on trouvera pour le potentiel d'une double couche (cfr. 393, 402*)

(393*) $$\begin{cases} l_0 = -\sin\psi_0 \cos\vartheta, \ m_0 = -\sin\psi_0 \sin\vartheta, n_0 = \cos\psi_0, \\ u^0_{2\,0} = 0, \ u^0_1 = u\cos\psi_0 + \nu\sin\psi_0, \ \text{où} \ u = \lambda\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta, \\ c^0_2 = \operatorname{tg}\psi_0(1 - u'_0) + \dfrac{\nu' - \sin\psi_0}{\cos\psi_0}, \ c_0 = -u\sin\psi_0 + \nu\cos\psi_0, \end{cases}$$

(429) $$\begin{cases} I' = \cos\psi_0 \displaystyle\int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left\{(\nu' - \sin\psi_0)\frac{u\cos\psi_0}{(1 - u'_0)^2} + \frac{(\nu' - \sin\psi_0)(\nu\sin\psi_0 - c_1)}{(1 - u'_0)^2} + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{\nu - c_1\sin\psi_0}{1 - u'_0}\right\} d\vartheta . \end{cases}$$

Si la fonction σ_0 est constante, on trouvera

(430) $$I' = 0,$$

d'où il suit que $\lim_{h=0}\left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial s}\right]$ est toujours finie en un point conique, pourvu que le moment de la double couche soit continu.

Remarque IV. Ce même résultat (430) aura lieu, si la fonction $\sigma(r, \vartheta)$ est discontinue suivant l'axe des x, de manière que $\sigma_0 =$ une constante σ_1 pour $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ et $=$ une constante σ_2 pour $\pi \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, pourvu que $\mu' = \mu = 0$.

§ 48. *La dérivée première du potentiel d'une double couche.* Nous supposerons dans ce § que la surface admet, au point P_0 et en tous les points du voisinage de P_0, un plan tangent bien déterminé, et nous prenons la direction $(l\ m\ n)$ suivant la normale qui passe par le point Q. Donc nous aurons (411) dans le cas (410)

(431) $$\psi_0 = l_0 = m_0 = 0,\ n_0 = 1,\ n_0 = 0,\ n_1 = -\frac{r}{2}(\bar{l}^2 + \bar{m}^2 + \bar{n}^2).$$

L'équation de la surface peut s'écrire

(432) $$z = r \operatorname{tg} \psi,$$

et en supposant que les quantités $\frac{\partial z}{\partial r}$ et $\frac{\partial z}{\partial \vartheta}$ soient finies, nous trouverons

(433) $$u_2^0 \equiv l \cos\vartheta + m \sin\vartheta = -n \frac{\partial z}{\partial r}\cdot$$

Supposons

(434) $$\lim_{r=0}\left(r \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0,$$

(435) $$\begin{cases} \therefore\ \bar{l}_0 = -2\bar{\psi}_0 \cos\vartheta + \dfrac{d\bar{\psi}_0}{d\vartheta}\sin\vartheta \\ \bar{m}_0 = -2\bar{\psi}_0 \sin\vartheta - \dfrac{d\bar{\psi}_0}{d\vartheta}\cos\vartheta, \end{cases}$$

(436) $$\begin{cases} \therefore\ u_0 \equiv \bar{l}_0 \cos\vartheta + \bar{m}_0 \sin\vartheta = -2\bar{\psi}_0 \\ \bar{c}_0 = \lambda \bar{l}_0 + \mu \bar{m}_0 + \nu \bar{n}_0 = -2\bar{\psi}_0 u - \dfrac{d\bar{\psi}_0}{d\vartheta}\dfrac{\partial u}{\partial \vartheta}, \end{cases}$$

où

(437) $$u = \lambda \cos\vartheta + \mu \sin\vartheta.$$

Nous trouverons (402* et 416) que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{ds}$ sont

$$(438)\quad \begin{cases} I' = \int\limits_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\left[\dfrac{\nu'(u-c_1)}{(1-u')^2} + \dfrac{\nu'}{1-u'}\right] d\vartheta = 0 \\ F_s = \int\limits_0^{2\pi} \{\sigma_0(\vartheta)[3\bar{\psi}_0(\vartheta)u + \bar{c}_0] + \nu\bar{\sigma}_0(\vartheta)\}\, d\vartheta = 0 \\ E_s^1 = -\lim\limits_{h=0} \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \int\limits_h^a [\sigma_0(\vartheta)(3uu^1 - c_1^1) - \nu\sigma_1 + 3\sigma_0(\vartheta)\psi_1 u]\dfrac{dr}{r} = \text{une quantité} \end{cases}$$

finie, où

$$(417^*)\quad \begin{cases} \sigma(r,\vartheta) = \sigma_0(\vartheta) + r\bar{\sigma}_0(\vartheta) + r\sigma_1(r,\vartheta),\ \psi = r\bar{\psi}_0(\vartheta) + r\psi_1(r,\vartheta) \\ l = r\bar{l}_0(\vartheta) + rl_1(r,\vartheta),\ m = rm_0(\vartheta) + rm_1(r,\vartheta),\ n = 1 + rn_1(r,\vartheta) \\ u' = \lambda'\cos\vartheta + \mu'\sin\vartheta,\ u^1 = l_1\cos\vartheta + m_1\sin\vartheta \\ c_1 = \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu',\ c_1^1 = \lambda l_1 + \mu m_1 + \nu n_1 \\ \lim\limits_{r=0}\sigma_1 = 0 \text{ etc.} \end{cases}$$

Cas particuliers. 1°. *Point régulier.* Supposons

$$(334)\quad \begin{cases} \bar{\psi}_0 = \alpha\cos^2\vartheta + 2\beta\cos\vartheta\sin\vartheta + \gamma\sin^2\vartheta \\ \sigma_0 = \text{une constante} \\ \bar{\sigma}_0 = a'\cos\vartheta + b'\sin\vartheta, \end{cases}$$

$$(439)\quad \begin{cases} \therefore\ \bar{l}_0 = -2(\alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta) \\ \bar{m}_0 = -2(\beta\cos\vartheta + \gamma\sin\vartheta). \end{cases}$$

Des égalités (426), (427), (431), (334), (439) et (338) nous tirons

$$(440)\quad a_1 = -2\sigma_0\alpha,\ b_1 = -2\sigma_0\beta,\ a_2 = -2\sigma_0\beta,\ b_2 = -2\sigma_0\gamma,\ a_3 = a',\ b_3 = b',$$

$$(427^*)\quad \therefore\ I_s = 2\pi(\lambda a' + \mu b')$$

$$(428^*)\quad \lim_{h=0}\left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial s}\right] = 4\pi(\lambda a' + \mu b') = 4\pi\left(\frac{\partial u}{\partial s_1}\right)_0,$$

où ds_1 est la projection de l'élément ds dans le plan tangent qui passe par le point P_0.

Remarque I. On retrouvera l'égalité (428*) en appliquant la formule (364), si l'on pose (391)

(441) $$w = 4\pi\sigma n\,.$$

Remarque II. Si, dans les équations (367), nous posons (428*)

(442) $$\xi = 4\pi\frac{\partial\mu}{\partial x_1},\ \eta = 4\pi\frac{\partial\mu}{\partial y_1},\ \zeta = 0,\ \text{où}\ \mu = n\sigma,$$

nous trouverons (377)

(443) $$\begin{cases} \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial^2 W_{h+}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 W_{h-}}{\partial x^2}\right) = 4\pi\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x^2} \\ \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial^2 W_{h+}}{\partial x\,\partial y} - \dfrac{\partial^2 W_{h-}}{\partial x\,\partial y}\right) = 4\pi\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x\,\partial y} \\ \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial^2 W_{h+}}{\partial x\,\partial z} - \dfrac{\partial^2 W_{h-}}{\partial x\,\partial z}\right) = 8\pi\alpha\dfrac{\partial\mu}{\partial x} + 8\pi\beta\dfrac{\partial\mu}{\partial y} \\ \lim\limits_{h=0}\left(\dfrac{\partial^2 W_{h+}}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 W_{h-}}{\partial z^2}\right) = -4\pi\left(\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\mu}{\partial y^2}\right), \end{cases}$$

où tous les termes sont pris pour $r = 0$.

2°. *Le point P se meut suivant la normale.* Nous trouverons (324, 327) pour $\psi_0 = \lambda' = \mu' = 0,\ \nu' = 1$

(444) $$\begin{cases} E = 8u_1u_2 - 2v_1v_2 - 2c - (v_1u_2 + v_2u_1)\left(7 + 3\log\dfrac{1}{2}\right) \\ \bar{A'} = -(3u_1u_2 - c)\log\dfrac{1}{2} + v_1v_2 + c - 4u_1u_2 - 2(v_1u_2 + v_2u_1), \end{cases}$$

(445) $$\begin{cases} \therefore\ I_s = -\displaystyle\int_0^{2\pi}\sigma_0(\vartheta)(\bar{A} + \bar{\psi}_0 E)\,d\vartheta - \int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0 A'\,d\vartheta \\ \bar{A} = -(3u\bar{u} - \bar{c})\log\dfrac{1}{2} + \bar{c} - 4u\bar{u} - 2v\bar{u} \\ E = -4v - u\left(7 + 3\log\dfrac{1}{2}\right) \\ A' = v\log\dfrac{1}{2} + 2v - 2u, \end{cases}$$

d'où il suit (436)

(446) $$\therefore\ \lim_{h=0}\left(\frac{\partial W_{h+}}{\partial s} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial s}\right) = 4\int_0^{2\pi}\bar{\sigma}_0(\vartheta)\,u\,d\vartheta,$$

pourvu que (402*)

(447) $$I'_+ = - I'_- = \int_0^{2\pi} \sigma_0(\vartheta)\, u\, d\vartheta \text{ soit} = 0.$$

Corollaires. Nous trouverons (446, 437)

(448) $$\lim_{h=0} \left(\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z} \right) = 0$$

et (420, 438)

(449) $$\lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial z} = \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}_0(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Pour l'existence des deux termes du premier membre, il faut et il suffit que le second membre de l'égalité (449) soit $= 0$ et que (438, 411)

(450) $$\lim_{h=0} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \sigma_1(r, \vartheta) \frac{dr}{r} \text{ soit = une quantité finie.}$$

§ **49.** *Dérivée normale. Théorème de M. Liapounoff.* M. LIAPOUNOFF a démontré dans des cas très étendus que si l'une des deux limites $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial W_{h+}}{\partial z}$ et $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial W_{h-}}{\partial z}$ existe, le point P étant situé sur la normale qui passe par le point P_0, donc l'autre limite existe aussi et est égale à la première. Ce théorème est déduit dans le § précédent (formule 448) dans le cas défini par les suppositions (410) et (434). Nous étudierons dans ce § plus en détail les suppositions qu'il faut faire pour la déduction de la formule (448).

Posons dans la formule (399)

(451) $$\lambda' = \mu' = \lambda = \mu = 0,\ \nu' = \nu = 1,\ \lim_{r=0} \sigma = \sigma_0(\vartheta) \text{ et } \lim_{r=0} \psi = \psi_0(\vartheta),$$

(452) $$\left\{ \begin{array}{l} \therefore \dfrac{\partial W_h}{\partial z} = -\dfrac{1}{h} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(r, \vartheta)\, f \frac{t\, dt}{q'^3},\ r = ht \\ f = 3\,(q \sin\psi - 1)\,(u_2 q \cos\psi + n_2 q \sin\psi - n) \dfrac{1}{q'^2} - n \\ u_2 \equiv l \cos\vartheta + m \sin\vartheta \\ q' = \sqrt{q^2 - 2\,q \sin\psi + 1},\ q = \dfrac{t}{\cos\psi}, \end{array} \right.$$

(453)
$$\begin{cases} f_- = -3(q\sin\psi + 1)(uq\cos\psi + nq\sin\psi + n)\dfrac{1}{q'^2_-} + n \\ q'_- = \sqrt{q^2 + 2q\sin\psi + 1}\,, \end{cases}$$

(454)
$$\therefore \frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z} = -\frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \sigma(r,\vartheta)\left(\frac{f_+}{q'^3_+} + \frac{f_-}{q'^3_-}\right) t\,dt\,.$$

Nous étudierons séparément les deux cas: I $\psi = 0$, II $\psi \gtreqless 0$, $\psi'_0 = 0$.

I. *Surface plane.* Dans ce cas

$$\psi = l = m = 0,\ n = 1,\ \therefore u_2 = 0,\ q = t.$$

Posons

(455)
$$p = \sqrt{t^2 + 1}\,,$$

$$\therefore q'_+ = q'_- = p$$

$$f_+ = -f_- = \frac{3}{p^2} - 1\,,$$

(456)
$$\therefore \frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z} = 0\,.$$

Pour l'étude de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial z}$ nous posons

(457)
$$\varrho(r) = \int_0^{2\pi} \sigma(r,\vartheta)\,d\vartheta\,,$$

(458)
$$\therefore \frac{\partial W_h}{\partial z} = \frac{1}{h}\int_0^{\frac{a}{h}} \varrho(r)\left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt\,.$$

Posons

(459)
$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_1(r),\ \varrho_0 = \text{une constante},\ \lim_{r=0} \varrho_1 = 0\,,$$

(460)
$$\begin{cases} \therefore \dfrac{\partial W_h}{\partial z} = Z_h - \dfrac{\varrho_0}{a} + \eta_h,\ \lim\limits_{h=0} \eta_h = 0 \\ Z_h = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{\frac{a}{h}} \varrho_1(r)\left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt\,, \end{cases}$$

d'où il suit que l'existence de $\lim\limits_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial z}$ dépend de l'existence de $\lim\limits_{h=0} Z_h$.

Nous supposons qu'on peut écrire

$$(461)\quad \begin{cases} \varrho_1(r) = \varphi(h)\,\varphi_1(h,t),\ \lim\limits_{h=0} \varphi_1(h,t) = \text{une quantité} \\ \qquad\qquad \text{finie et déterminée} \equiv \Phi(t) \text{ qui est } \neq 0, \end{cases}$$

$$(462)\quad \begin{cases} \therefore Z_h = \frac{\varphi(h)}{h} \int\limits_0^{\frac{a}{h}} \varphi_1(h,t) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt \\ \varphi_1(h,t) = \Phi(t) + \eta'_h,\ \lim\limits_{h=0} \eta'_h = 0. \end{cases}$$

Si $\lim\limits_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h}$ est finie, nous retrouverons le cas du § précédent, et il nous faut discuter seulement le cas, où cette quantité est infinie. Dans ce cas la fonction $\Phi(t)$ devient infinie d'un ordre qui est plus petit que l'unité, lorsque t tend vers l'infini,

$$\therefore \lim_{h=0} \int\limits_0^{\frac{a}{h}} \varphi_1(h,t) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5} - \frac{1}{t^3}\right) t\,dt = \text{une quantité finie} \equiv I,$$

$$\therefore Z_h = \frac{\varphi(h)}{h}\,(I + K_h + \eta''_h),\ \lim_{h=0} \eta''_h = 0$$

$$I = \int\limits_0^1 \Phi(t) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt + \int\limits_1^\infty \Phi(t) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5} - \frac{1}{t^3}\right) t^2\,dt$$

$$K_h = \int\limits_1^{\frac{a}{h}} \varphi_1(h,t) \frac{dt}{t^2}.$$

Pour que $\lim\limits_{h=0} Z_h$ soit finie, il faut donc que la quantité

$$K = \lim_{h=0} K_h$$

soit finie et $= -I$. Posons

$$\varphi_1(h,t) = \varphi_2(t)\,\varphi_3(h,t),\ \lim_{\substack{h=0\\ t=\infty}} \varphi_3 \text{ finie pour } ht \leq a,$$

et supposons que la quantité $\varphi_2(t)$ ne change pas de signe pour $t >$ une certaine quantité w,

$$\therefore\ K_h = \varphi_m \int_1^{\frac{a}{h}} \varphi_2(t) \frac{dt}{t^2},$$

où φ_m est une valeur moyenne de φ_3,

$$\therefore\ K = \varphi_4 \int_1^{\infty} \varphi_2(t) \frac{dt}{t^2},$$

où $\varphi_4 = \lim\limits_{h=0} \varphi_m$. Pour que la quantité K soit finie, il faut donc que l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \varphi_2(t) \frac{dt}{t^2} \text{ soit finie,}$$

ou, ce qui revient au même, que l'intégrale

$$(463) \qquad \int_1^{\infty} \Phi(t) \frac{dt}{t^2} = \text{une quantité finie.}$$

Dans ce cas nous aurons la condition

$$(464) \qquad \int_0^{\infty} \Phi(t) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt = 0.$$

On voit sans difficulté qu'on pourra énoncer le théorème suivant:

Théorème. *Soit la fonction* $\varrho_1(r)$ (459, 457) *développée de la manière suivante pour* $r = ht$:

$$(465) \quad \begin{cases} \varrho_1(r) = \varphi_1(h) X_1(t) + \varphi_2(h) X_2(t) + \cdots + \varphi_n(h) X_n(t) + \varphi_{n+1}(h) X_{n+1}(h, t) \\ \lim\limits_{h=0} \dfrac{\varphi_{\nu+1}}{\varphi_\nu} = 0 \text{ pour } \nu = 1, 2, 3 \cdots n \\ \qquad \lim\limits_{h=0} \dfrac{\varphi_n(h)}{h} \text{ infinie.} \end{cases}$$

Pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial z}$ *dans le cas d'une couche plane, il faut que l'on ait*

$$(466)\quad \begin{cases} \int_0^\infty X_\nu(t)\left(\frac{1}{p^3}-\frac{3}{p^5}\right)t\,dt = 0 \text{ pour } \nu = 1, 2, 3 \cdots n \\ p = \sqrt{t^2+1}. \end{cases}$$

$$(467)\quad \begin{cases} \therefore\ Z_h = \frac{\varphi_{n+1}(h)}{h}\int_0^{\frac{a}{h}} X_{n+1}(h,t)\left(\frac{1}{p^3}-\frac{3}{p^5}\right)t\,dt. \\ \lim_{h=0}\frac{\partial W_h}{\partial z} = \lim_{h=0} Z_h - \frac{\varrho_0}{a}. \end{cases}$$

Si le développement de la fonction $\varrho_1(r)$ peut être poussé jusqu'à une valeur de n telle que

$$(468)\quad \lim_{h=0}\frac{\varphi_{n+1}(h)}{h} = \textit{une quantité finie},$$

il faut de plus et il suffit que l'on ait

$$(469)\quad \lim_{h=0}\int_1^{\frac{a}{h}} X_{n+1}(h,t)\frac{dt}{t^2} = \textit{une quantité finie}.$$

Nous démontrerons maintenant le théorème suivant:

Théorème. *Si une fonction $\Phi(t)$ va toujours en augmentant ou toujours en diminuant, lorsque la variable t croît de zéro jusqu'à l'infini, l'intégrale*

$$(470)\quad Z = \int_0^\infty \Phi(t)\left(\frac{1}{p^3}-\frac{3}{p^5}\right)t\,dt \textit{ est } \neq 0.$$

En effet.

$$(471)\quad \int_0^\infty \left(\frac{1}{p^3}-\frac{3}{p^5}\right)t\,dt = 0,$$

et $\frac{1}{p^3}-\frac{3}{p^5}$ est $= 0$ pour $t = \sqrt{2}$ et $\neq 0$ pour $0 \leq t \neq \sqrt{2}$,

$$(472) \qquad \therefore Z_0 \equiv \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) t\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt > 0\,.$$

Si $\Phi(t)$ va toujours en augmentant, nous aurons

$$(473) \qquad Z' = \int_0^{\sqrt{2}} \Phi(t) \left(\frac{3}{p^5} - \frac{1}{p^3}\right) t\,dt < \Phi(\sqrt{2})\, Z_0 < \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \Phi(t) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t\,dt - Z'',$$

et nous trouverons un résultat analogue, si $\Phi(t)$ va toujours en diminuant.

Corollaire. Si la fonction $\varrho_1(r)$ va toujours en diminuant, lorsque r diminue, il faut et il suffit pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial z}$ que

$$(474) \qquad \int_0^{\alpha} (\varrho_1 - \varrho_0) \frac{dr}{r^2} \text{ soit} = \text{une quantité finie, } \varrho_0 \equiv \lim_{r=0} \varrho_1\,.$$

Remarque I. Si $\varrho_1 = \varrho_0 + r\bar{\varrho}$, $\lim\limits_{r=0} \bar{\varrho}$ = une quantité finie, la condition (474) est nécessaire et suffisante pour l'existence de $\lim\limits_{h=0} \dfrac{\partial W_h}{\partial z}$, même dans le cas où la fonction ϱ_1 ne va pas toujours en diminuant. On trouvera

$$(475) \qquad \lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial z} = -\frac{\varrho_0}{a} - (2 - \log 2)\, \bar{\varrho}_0 + \int_0^{\alpha} \varrho_1(r) \frac{dr}{r^2},\ \bar{\varrho}_0 \equiv \lim_{r=0} \bar{\varrho}\,.$$

II. *Surface courbe, lim* $\lim\limits_{r=0} \psi = 0$. Dans ce cas, le plan des xy est un plan tangent de la surface, même dans le cas où les quantités $\dfrac{\partial \psi}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$ n'existent pas toutes les deux en ce point. C'est le cas par ex., si

$$(476) \qquad \psi = r^{\alpha} \sin \frac{1}{r},\ 0 < \alpha < 1\,,$$

où même $\lim\limits_{r=0} \left(\dfrac{r\,\partial \psi}{\partial r}\right)$ n'existe pas. La définition d'une double couche implique l'existence d'une normale bien déterminée à chaque point, mais cette exi-

stence n'implique donc pas du tout l'existence des dérivées premières des coordonnées. Nous nous placerons dans un cas plus général, si nous ne supposons pas l'existence des dérivées $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$, comme nous l'avons fait dans le § 48. Mais nous supposerons seulement que $l\,m\,n$ sont des fonctions quelconques qui satisfont (cfr. 431, 432, 433) aux égalités

$$(477) \qquad \begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \; l_0 = m_0 = 0, \; \therefore \; n_0 = 1, \text{ et} \\ u_2 \equiv l \cos \vartheta + m \sin \vartheta = -n \left(\operatorname{tg} \psi + \frac{r \psi_1}{\cos^2 \psi}\right) \\ \lim\limits_{r=0} \psi_1 = \text{une quantité finie (cfr. équ. 434).} \end{cases}$$

Nous trouverons (454)

$$\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z} = \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \mu F t dt, \; \mu = n\sigma$$

$$F = 3(q \sin \psi - 1)\left(\frac{q r \psi_1}{\cos \psi} + 1\right) \frac{1}{q'^5_+} - 3(q \sin \psi + 1)\left(\frac{q r \psi_1}{\cos \psi} - 1\right) \frac{1}{q'^5_-} +$$

$$+ \frac{1}{q'^3_+} - \frac{1}{q'^3_-} F_1 \psi_1 + F_2,$$

où le premier terme du dernier membre renferme tous les termes qui ont ψ_1 pour facteur commun. Nous trouverons pour la limite de l'intégrale correspondante

$$(478) \qquad \begin{cases} I_1 = \lim\limits_{h=0} \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \mu F_1 \psi_1 t dt = -4 \int_0^{2\pi} \mu_0(\vartheta) \psi_1^0(\vartheta) d\vartheta, \text{ où} \\ \mu_0(\vartheta) \equiv \lim\limits_{r=0} \mu(r, \vartheta), \; \psi_1^0(\vartheta) \equiv \lim\limits_{r=0} \psi_1(r, \vartheta). \end{cases}$$

De plus nous aurons

$$F_2 = 3 q \sin \psi \left(\frac{1}{q'^5_+} + \frac{1}{q'^5_-}\right) - 3\left(\frac{1}{q'^5_+} - \frac{1}{q'^5_-}\right) + \left(\frac{1}{q'^3_+} - \frac{1}{q'^3_-}\right),$$

d'où nous tirons en développant

$$F_2 = 6\left(2 - \frac{5}{p^2}\right)\frac{t\psi}{p^5} + \frac{t\psi^2}{p^5}P, \ \lim_{t=\infty} P \text{ finie.}$$

Posons

(479)
$$\left\{\begin{aligned} & I_2^{(h)} = \frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \mu F_2\, t\, dt, \\ & \therefore \frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z} = I_1 + I_2^{(h)} + \eta_h, \ \lim_{h=0} \eta_h = 0; \end{aligned}\right.$$

par suite l'existence de $\lim_{h=0}\left(\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z}\right)$ dépend de l'existence de $\lim_{h=0} I_2^{(h)}$. Posons de plus

(480)
$$\left\{\begin{aligned} & \psi = \varphi(r)\,\psi_1(r, \vartheta), \ \lim_{r=0} \psi_1 \text{ finie} = \psi_2(\vartheta), \\ & \varphi(r) = \varphi_1(h)\,\varphi_2(h,t), \ \lim_{h=0} \varphi_2(h,t) \text{ finie} = \Phi(t) \neq 0. \\ & \therefore I_2^{(h)} = 6\frac{\varphi_1(h)}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \mu \left\{2 - \frac{5}{p^2} + \frac{\psi}{6}P\right\} \psi_1 \varphi_2 \frac{t^2\, dt}{p^5}. \end{aligned}\right.$$

Si $\lim_{h=0} \frac{\varphi_1(h)}{h}$ est finie, nous retrouverons le cas du § précédent, et si $\lim_{h=0} \frac{\varphi_1(h)}{h}$ est infinie — ce que nous supposerons ici — la fonction $\Phi(t)$ devient infinie d'un ordre qui est plus petit que l'unité, lorsque t tend vers l'infini,

(481)
$$\left\{\begin{aligned} & \therefore I = \lim_{h=0}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \mu \left\{2 - \frac{5}{p^2} + \frac{\psi}{6}P\right\} \psi_1 \varphi_2 \frac{t^2\, dt}{p^5} = \\ & \qquad = \int_0^{2\pi} \mu_0(\vartheta)\,\psi_2(\vartheta)\, d\vartheta \int_0^{\infty} \Phi(t)\left[2 - \frac{5}{p^2}\right]\frac{t^2\, dt}{p^5} = \text{une quantité finie,} \end{aligned}\right.$$

(482)
$$\therefore I_2^{(h)} = 6\frac{\varphi_1(h)}{h}(I + \eta'_h), \ \lim_{h=0} \eta'_h = 0.$$

Pour que $\lim_{h=0} I_2^{(h)}$ soit finie, il faut donc que

(483)
$$I \text{ soit} = 0,$$

d'où il suit ou que

$$(484) \qquad \Theta \equiv \int_0^{2\pi} \mu_0(\vartheta)\,\psi_2(\vartheta)\,d\vartheta = 0$$

ou que

$$(485) \qquad I_0 \equiv \int_0^{\infty} \Phi(t)\left[2 - \frac{5}{p^2}\right]\frac{t^2\,dt}{p^5} = 0.$$

Nous aurons

$$\int_0^{\infty}\left(2 - \frac{1}{p^2}\right)\frac{t^2\,dt}{p^5} = 0,$$

par suite nous trouverons, comme dans le cas précédent (cfr. 470, 471, 472 et 473), que si la fonction $\Phi(t)$ va constamment en augmentant, I_0 est > 0,

$$\therefore \lim_{h=0} I_2^h \text{ infinie.}$$

Pour que $\lim\limits_{h=0} I_2^{(h)}$ soit finie, il faut donc que

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi_1(h)}{h} \text{ soit finie.}$$

D'où il suit que si nous posons

$$(486) \qquad \psi = r\bar{\psi},$$

il faut que $\lim\limits_{r=0} \bar{\psi}$ soit finie $\equiv \bar{\psi}_0(\vartheta)$, $\therefore\ \Phi(t) = t$,

$$(487) \qquad \therefore\ I_0 = \frac{2}{3},$$

$$(488) \qquad \therefore\ \lim_{h=0}\left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z}\right] = 4\int_0^{2\pi} \mu_0(\vartheta)[-\psi_1^0(\vartheta) + \bar{\psi}_0(\vartheta)]\,d\vartheta.$$

L'égalité (477) donne, pour

$$u_2 = r u,\ u_0 = \lim_{r=0} u,$$

$$u_0 = -(\psi_0 + \psi_1^0),$$

$$\therefore\ -\psi_1^0 + \psi_0 = u_0 + 2\,\psi_0,$$

d'où le théorème:

Théorème. *Si les fonctions lmn satisfont à la condition suivante:*

$$(477^*)\qquad \begin{cases} u_2 \equiv l\cos\vartheta + m\sin\vartheta = -n\left(\operatorname{tg}\psi + \dfrac{r\,\psi_1}{\cos^2\psi}\right) \\ \lim\limits_{r=0} \psi_1 = \textit{une quantité finie}, \end{cases}$$

si l'angle ψ va constamment en diminuant, lorsque r diminue, et si la quantité Θ (484) n'est pas nulle, la condition nécessaire et suffisante, pour que

$$\lim_{h=0}\left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z}\right] \textit{ soit finie,}$$

est que

$$(489)\qquad \lim_{r=0}\left(\frac{\psi(r,\vartheta)}{r}\right) \textit{ est finie.}$$

Si, de plus, les fonctions $l\,m\,n$ satisfont à l'égalité

$$(436^*)\qquad \overline{u}_0 + 2\,\overline{\psi}_0 = 0,$$

donc

$$(490)\qquad \lim_{h=0}\left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z}\right] = 0.$$

Remarque II. Dans le cas où la condition (477*) est satisfaite, la condition (489) est suffisante pour l'existence de $\lim\limits_{h=0}\left[\dfrac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \dfrac{\partial W_{h-}}{\partial z}\right]$ et cette limite deviendra $= 0$, si l'égalité (436*) est satisfaite.

De plus, nous trouverons, en supposant que les quantités ψ_1 et ψ_0 soient finies,

$$\frac{\partial W_h}{\partial z} = 3\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \mu\,(q\sin\psi - 1)\,\psi_1\, q\,\frac{t^2\,dt}{\cos\psi\, q'^5} + 3\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_1^{\frac{a}{h}} \mu\left[(q\sin\psi - 1)\frac{t^2}{\cos\psi\, q'^5} - \right.$$

$$\left. - q^2\,\frac{\operatorname{tg}\psi\cos^5\psi}{t^3}\right]\psi_1\,dt + 3\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \mu\,\psi_1\cos^2\psi\sin\psi\,\frac{dr}{r} + \frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \mu\left[\frac{3\,(q\sin\psi - 1)}{q'^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{q'^3}\right] t\,dt = 2\int_0^{2\pi} \mu_0\,(\overline{\psi}_0 - \psi_1^0)\,d\vartheta + 3\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \mu\,\psi_1\cos^2\psi\sin\psi\,\frac{dr}{r} + \frac{1}{h}\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{h}} \mu\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^5}\right) t\,dt +$$

$$+ \eta_h,\quad \lim_{h=0} \eta = 0.$$

D'où le théorème:

Théorème. *Si les conditions* (489 *et* 477*) *de l'existence de* $\lim\left[\frac{\partial W_{h+}}{\partial z} - \frac{\partial W_{h-}}{\partial z}\right]$ *sont satisfaites, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de* $\lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial z}$ *est que la quantité*

$$(491) \qquad Z = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \partial \vartheta \int_0^h \mu(r, \vartheta) \left(\frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^5}\right) t dt$$

existe,
ce qui est la même condition (460) *que pour une surface plane. Si la condition* (436*) *est remplie, nous trouverons*

$$(492) \qquad \lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial z} = Z + \lim_{h=0} 3 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^a \mu(r, \vartheta) \psi_1(r, \vartheta) \cos^2\psi \sin\psi \frac{dr}{r}.$$

Remarque III. Si $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$ existent, donc $\psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial r}$ dans le cas d'une double couche,

$$(492^*) \qquad \begin{cases} \therefore \lim_{h=0} \frac{\partial W_h}{\partial z} = -\lim_{h=0} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_h^a \mu(r, \vartheta) \frac{\partial \cos^3\psi}{\partial r} \frac{dr}{r} + \int_0^a \bar{\varrho}(r) \frac{dr}{r} - \frac{\varrho_0}{a}, \text{ en supposant} \\ \int_0^{2\pi} \mu d\vartheta = \varrho_0 + r\bar{\varrho}, \ \lim_{r=0} \bar{\varrho} = 0. \end{cases}$$

Résumé.

§ **50.** *La méthode et quelques résultats généraux.* La méthode employée dans ce mémoire peut être décrite en deux mots de la manière suivante. Pour l'étude de l'existence de la quantité

$$(493)\qquad \begin{cases} I = \lim\limits_{h=0} I_h \\ I_h = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^a f(r, h)\, dr, \end{cases}$$

nous posons

$$(494)\qquad r = ht.$$

et nous développons

$$(495)\qquad f(ht, h) = \frac{1}{t} f_1 + \frac{1}{t^2} P,$$

où les quantités f_1 et P restent toujours plus petites qu'une constante finie pour $t > 1$, et où les fonctions f et f_1 sont telles que les intégrales

$$\int_0^w f(ht, h)\, dt \text{ et } \int_\varkappa^w f_1 \frac{dt}{t},\ 0 < \varkappa < 1 < w < \frac{a}{h},$$

restent finies pour toutes les valeurs de $h \geq 0$, les constantes $\varkappa$ et w étant indépendantes de h. Puis nous écrivons

$$(496)\qquad I_h = \int_0^1 f(ht, h)\, dt + \int_1^w \left(f - \frac{f_1}{t}\right) dt + \int_w^{\frac{a}{h}} \left(f - \frac{f_1}{t}\right) dt + \int_h^a f_1 \frac{dr}{r}.$$

Pour des valeurs suffisamment petites de h on peut (493) prendre la constante w assez grande pour que le troisième terme du second membre de (496) devienne quelque petit qu'on voudra,

$$(497)\qquad \begin{cases} \therefore\ I = \lim\limits_{h=0} I_h = K + Q \\ K = \lim\limits_{h=0} K_h \\ K_h = \displaystyle\int_h^a f_1 \frac{dr}{r} \\ Q = \displaystyle\int_0^1 f_0(t)\, dt + \int_1^\infty \left[f_0(t) - \frac{f_1^0(t)}{t}\right] dt \\ f_0(t) = \lim\limits_{h=0} f(ht, h) \\ f_1^0(t) = \lim\limits_{h=0} f_1. \end{cases}$$

La quantité Q (497) est toujours finie, par suite *la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de* $\lim_{h=0} I_h$ *est que la quantité* K *existe.*

Le plus souvent, la quantité f_1 est une fonction de r seulement,

$$\therefore\ K_h = \int_h^a f_1(r) \frac{dr}{r}. \tag{498}$$

Dans quelques cas, la fonction $f_0(t)$ devient infinie pour $t = 1$ sans que l'on sache à priori, si la quantité

$$\lim_{h=0} \int_0^w f\,dt$$

est finie ou non. Dans ces cas nous avons cherché une fonction H_h d'une forme aussi simple que possible et telle que

$$\lim_{h=0} \int_0^w (f - H_h)\,dt$$

est nécessairement finie. La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la quantité I est que la quantité

$$\lim_{h=0} (K_h + H_h) \text{ existe.} \tag{499}$$

Pour la dérivée $\frac{\partial^2 V}{\partial s_1 \partial s_2}$ du potentiel d'un espace à trois dimensions et la dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$ d'une simple couche, K_h est ce que deviendra la dérivée au point considéré P_0, lorsqu'on décrit autour de ce point fixe une sphère de rayon h et éloigne toute masse qui se trouve à l'intérieur de cette sphère.

Si la droite $P_+ P_0 P_-$ coupe une surface de discontinuité, et si les distances $P_0 P_+$ et $P_0 P_-$ sont égales ($= h$), nous avons trouvé que la quantité K_h reste la même pour les deux points P_+ et P_-, de manière que la différence des valeurs de la dérivée aux deux points a toujours une valeur finie pour lim $h = 0$.

Quant aux dérivées secondes d'une simple couche et aux dérivées premières d'une double couche, nous avons trouvé qu'il faut satisfaire à deux conditions pour leur existence (cfr. équ. 326 et 331), dont l'une dépend seulement des valeurs limites pour $h = 0$ des quantités considérées. L'autre condition consiste en l'existence d'une certaine quantité $W_{s's}$ (317) et cette quantité prend la même valeur aux deux points P_+ et P_-. Dans ce cas nous avons fait la supposition

que la fonction σ et l'angle ψ que fait le rayon vecteur P_0Q avec le plan des xy puissent s'écrire

$$(500)\qquad \begin{cases} \sigma = \sigma_0(\vartheta) + r\bar{\sigma}(r, \vartheta), \ \lim\limits_{r=0} \bar{\sigma} \text{ finie,} \\ \psi = \psi_0(\vartheta) + r\bar{\psi}(r, \vartheta), \ \lim\limits_{r=0} \bar{\psi} \text{ finie.} \end{cases}$$

La supposition (498) a été discutée plus particulièrement dans le cas du théorème de M. Liapounoff (§ 49).

Table des intégrales.

$$p = \sqrt{s^2 - 2su + 1}, \quad A = \frac{1}{(1-u^2)p^3} + \frac{2}{(1-u^2)^2 p}, \quad B = \frac{1}{(1-u^2)p^5} + \frac{4}{3(1-u^2)^2 p^3} + \frac{8}{3(1-u^2)^3 p}.$$

$$\int \frac{ds}{p} = \log(p + s - u).$$

$$\int \frac{ds}{p^3} = \frac{s-u}{(1-u^2)p}$$

$$\int \frac{s\,ds}{p^3} = \frac{su-1}{(1-u^2)p}$$

$$\int \frac{s^2 ds}{p^3} = \log(p+s-u) + \frac{(2u^2-1)s-u}{(1-u^2)p}$$

$$\int \frac{s^3 ds}{p^3} = p + 3u\log(p+s-u) + \frac{(4u^2-3)us+1-2u^2}{(1-u^2)p}.$$

$$\int \frac{ds}{p^5} = \frac{s-u}{3(1-u^2)}\left[\frac{1}{p^3} + \frac{2}{(1-u^2)p}\right]$$

$$\int \frac{s\,ds}{p^5} = \frac{su-1}{3(1-u^2)p^3} + \frac{2u(s-u)}{3(1-u^2)^2 p}$$

$$\int \frac{s^2 ds}{p^5} = \frac{(2u^2-1)s-u}{3(1-u^2)p^3} + \frac{(1+u^2)(s-u)}{3(1-u^2)^2 p}$$

$$\int \frac{s^3 ds}{p^5} = \frac{(4u^3-3u)s+1-2u^2}{3(1-u^2)p^3} + \frac{(3u-u^3)s+3u^2-2u^4-3}{3(1-u^2)^2 p}$$

$$\int \frac{s^4 ds}{p^5} = \log(p+s-u) + \frac{(8u^4-8u^2+1)s+(3-4u^2)u}{3(1-u^2)p^3} +$$
$$+ \frac{2(7u^2-4u^4-2)s+2(5u^2-2u^4-4)u}{3(1-u^2)^2 p}$$

$$\int \frac{s^5 ds}{p^5} = p + 5u\log(p+s-u) + \frac{(16u^5-20u^3+5u)s+8u^2-8u^4-1}{3(1-u^2)p^3} +$$
$$+ \frac{(50u^3-28u^5-20u)s+28u^4-8u^6-28u^2+6}{3(1-u^2)^2 p}.$$

$$\int \frac{ds}{p^7} = \frac{s-u}{5} B$$

$$\int \frac{s\,ds}{p^7} = -\frac{1}{5p^5} + \frac{u(s-u)}{5} B$$

$$\int \frac{s^2 ds}{p^7} = -\frac{2u}{5p^5} + \frac{s-u}{3} A + \frac{(2u^2-1)(s-u)}{5} B$$

$$\int \frac{s^3 ds}{p^7} = -\frac{1}{3p^3} - \frac{4u^2-1}{5p^5} + u(s-u)A + \frac{(4u^3-3u)(s-u)}{5} B$$

$$\int \frac{s^4 ds}{p^7} = -\frac{4u}{3p^3} - \frac{8u^3-4u}{5p^5} + \frac{s-u}{(1-u^2)p} + \frac{(8u^2-2)(s-u)}{3} A + \frac{(8u^4-8u^2+1)(s-u)}{5} B$$

$$\int \frac{s^5 ds}{p^7} = -\frac{1}{p} - \frac{12u^2-2}{3p^3} - \frac{16u^4-12u^2+1}{5p^5} + \frac{5u(s-u)}{(1-u^2)p} + \frac{10u(2u^2-1)(s-u)}{3} A +$$
$$+ \frac{(16u^5-20u^3+5u)(s-u)}{5} B$$

$$\int \frac{s^6 ds}{p^7} = \log(p+s-u) - \frac{6u}{p} - \frac{32u^3-12u}{3p^3} - \frac{32u^5-32u^3+6u}{5p^5} + \frac{(18u^2-3)(s-u)}{(1-u^2)p} +$$
$$+ \frac{(48u^4-36u^2+3)(s-u)}{3} A + \frac{(32u^6-48u^4+18u^2-1)(s-u)}{5} B.$$

$$\lambda^2+\mu^2 = \xi,\ \ z^2 = \lambda^2+\mu^2+\nu^2,\ \ u = \lambda\cos\vartheta + \mu\sin\vartheta,\ \ \therefore\ \nu = \sqrt{z^2-\xi}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{z-u} = \frac{2\pi}{\nu}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{(z-u)^2} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{2\pi}{r} = \frac{2\pi z}{r^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{(z-u)^3} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{2\pi z}{r^3} = -\frac{\pi}{r^3} + \frac{3\pi z^2}{r^5}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{(z-u)^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{2\pi}{r} = -\frac{2\pi\lambda}{r^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{(z-u)^2} = \frac{\partial}{\partial \mu}\frac{2\pi}{r} = -\frac{2\pi\mu}{r^3}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{(z-u)^3} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{2\pi\lambda}{r^3} = -\frac{3\pi\lambda z}{r^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{(z-u)^3} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{2\pi\mu}{r^3} = -\frac{3\pi\mu z}{r^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta\, d\vartheta}{z-u} = \int_z^{\infty} \frac{2\pi\lambda}{r^3}\, dz = \frac{2\pi\lambda}{\zeta}\left(\frac{z}{r} - 1\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{z-u} = \int_z^{\infty} \frac{2\pi\mu}{r^3}\, dz = \frac{2\pi\mu}{\zeta}\left(\frac{z}{r} - 1\right).$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\vartheta\, d\vartheta}{(z-u)^2} = \frac{2\pi(\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^2}\left(\frac{z}{r} - 1\right) + \frac{2\pi\lambda^2 z}{\zeta\, r^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\vartheta\sin\vartheta}{(z-u)^2}\, d\vartheta = -\frac{4\pi\lambda\mu}{\zeta^2}\left(\frac{z}{r} - 1\right) + \frac{2\pi\lambda\mu z}{\zeta\, r^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\vartheta\, d\vartheta}{(z-u)^2} = \frac{2\pi(\lambda^2-\mu^2)}{\zeta^2}\left(\frac{z}{r} - 1\right) + \frac{2\pi\mu^2 z}{\zeta\, r^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^3} = \frac{\pi}{r^3} + \frac{3\pi\lambda^2}{r^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^3} = \frac{3\pi\lambda\mu}{r^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^3} = \frac{\pi}{r^3} + \frac{3\pi\mu^2}{r^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \vartheta d\vartheta}{\varkappa - u} = \frac{2\pi(\lambda^2 - \mu^2)\varkappa}{\zeta^2}\left(\frac{\varkappa}{r} - 1\right) + \frac{2\pi\mu^2}{\zeta r}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{\varkappa - u} = \frac{4\pi\lambda\mu\varkappa}{\zeta^2}\left(\frac{\varkappa}{r} - 1\right) - \frac{2\pi\lambda\mu}{\zeta r}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{\varkappa - u} = \frac{2\pi(\mu^2 - \lambda^2)\varkappa}{\zeta^2}\left(\frac{\varkappa}{r} - 1\right) + \frac{2\pi\lambda^2}{\zeta r}.$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^2} = \frac{4\pi\lambda\varkappa}{\zeta^3}(3\mu^2 - \lambda^2)\left(\frac{\varkappa}{r} - 1\right) + \frac{2\pi\lambda(\lambda^2 - 3\mu^2)}{\zeta^2 r} + \frac{2\pi\lambda^3}{\zeta r^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^2} = \frac{4\pi\mu(\mu^2 - 3\lambda^2)}{\zeta^3}\varkappa\left(\frac{\varkappa}{r} - 1\right) + \frac{2\pi\mu(3\lambda^2 - \mu^2)}{\zeta^2 r} + \frac{2\pi\lambda^2\mu}{\zeta r^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \vartheta \sin^2 \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^2} = \frac{4\pi\lambda(\lambda^2 - 3\mu^2)}{\zeta^3}\varkappa\left(\frac{\varkappa}{r} - 1\right) + \frac{2\pi\lambda(3\mu^2 - \lambda^2)}{\zeta^2 r} + \frac{2\pi\lambda\mu^2}{\zeta r^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^2} = \frac{4\pi\mu\varkappa}{\zeta^3}(3\lambda^2 - \mu^2)\left(\frac{\varkappa}{r} - 1\right) + \frac{2\pi\mu(\mu^2 - 3\lambda^2)}{\zeta^2 r} + \frac{2\pi\mu^3}{\zeta r^3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^3 \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^3} = \frac{2\pi\lambda}{\zeta^3}(\lambda^2 - 3\mu^2)\left(\frac{\varkappa}{r} - 1\right) - \frac{\pi\lambda(3\mu^2 - \lambda^2)\varkappa}{\zeta^2 r^3} + \frac{3\pi\lambda^3\varkappa}{\zeta r^5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{(\varkappa - u)^3} = \frac{2\pi\mu(3\lambda^2 - \mu^2)}{\zeta^3}\left(\frac{\varkappa}{r} - 1\right) + \frac{\pi\mu(\mu^2 - 3\lambda^2)\varkappa}{\zeta^2 r^3} + \frac{3\pi\lambda^2\mu\varkappa}{\zeta r^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\sin^2\vartheta\,d\vartheta}{(z-u)^3}=\frac{2\pi\lambda(3\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^3}\left(\frac{z}{r}-1\right)+\frac{\pi\lambda(\lambda^2-3\mu^2)z}{\zeta^2 r^3}+\frac{3\pi\lambda\mu^2 z}{\zeta r^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3\vartheta\,d\vartheta}{(z-u)^3}=\frac{2\pi\mu}{\zeta^3}(\mu^2-3\lambda^2)\left(\frac{z}{r}-1\right)+\frac{\pi\mu(3\lambda^2-\mu^2)}{\zeta^2 r^3}z+\frac{3\pi\mu^3 z}{\zeta r^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3\vartheta\,d\vartheta}{z-u}=\frac{2\pi\lambda(\lambda^2-3\mu^2)(rz-z^2)}{\zeta^3}+\frac{2\pi\lambda^3 z}{\zeta^2 r}-\frac{\pi\lambda(\lambda^2+3\mu^2)}{\zeta^2}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{z-u}=\frac{2\pi\mu(3\lambda^2-\mu^2)}{\zeta^3}(rz-z^2)+\frac{2\pi\lambda^2\mu z}{\zeta^2 r}+\frac{\pi\mu(\lambda^2-\mu^2)}{\zeta^2}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\sin^2\vartheta\,d\vartheta}{z-u}=\frac{2\pi\lambda(3\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^3}(rz-z^2)+\frac{2\pi\lambda\mu^2 z}{\zeta^2 r}+\frac{\pi\lambda(\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^2}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3\vartheta\,d\vartheta}{z-u}=\frac{2\pi\mu(\mu^2-3\lambda^2)(rz-z^2)}{\zeta^3}+\frac{2\pi\mu^3 z}{\zeta^2 r}-\frac{\pi\mu(\mu^2+3\lambda^2)}{\zeta^2}.$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^4\vartheta\,d\vartheta}{(z-u)^2}=6\pi\left[\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^4}-\frac{1}{\zeta^2}\right](rz-z^2)+\frac{4\pi\lambda^2(3\mu^2-\lambda^2)z}{\zeta^3 r}+\frac{2\pi\lambda^4 z}{\zeta^2 r^3}-\frac{3\pi}{\zeta}+\frac{4\pi\lambda^2}{\zeta^2}+\frac{8\pi\lambda^2\mu^2}{\zeta^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{(z-u)^2}=\frac{24\pi\lambda\mu}{\zeta^4}(\mu^2-\lambda^2)(rz-z^2)+\frac{2\pi\lambda\mu}{\zeta^3 r}(3\mu^2-5\lambda^2)z+\frac{2\pi\lambda^3\mu z}{\zeta^2 r^3}+\frac{2\pi\lambda\mu(3\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta\,d\vartheta}{(z-u)^2}=\frac{\pi}{\zeta}\left(1-\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}\right)\left[1+\frac{2z}{r}+\frac{6(rz-z^2)}{\zeta}\right]+\frac{2\pi\lambda^2\mu^2 z}{\zeta^2 r^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\sin^3\vartheta\,d\vartheta}{(z-u)^2}=\frac{24\pi\lambda\mu}{\zeta^4}(\lambda^2-\mu^2)(rz-z^2)+\frac{2\pi\lambda\mu}{\zeta^2 r}(3\lambda^2-5\mu^2)z+\frac{2\pi\lambda\mu^3 z}{\zeta^2 r^3}+\frac{2\pi\lambda\mu}{\zeta^3}(3\lambda^2-\mu^2)$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4\vartheta\,d\vartheta}{(z-u)^2}=6\pi\left[\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^4}-\frac{1}{\zeta^2}\right](rz-z^2)+\frac{4\pi\mu^2}{\zeta^3 r}(3\lambda^2-\mu^2)z+\frac{2\pi\mu^4 z}{\zeta^2 r^3}-\frac{3\pi}{\zeta}+\frac{4\pi\mu^2}{\zeta^2}+\frac{8\pi\lambda^2\mu^2}{\zeta^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^4\vartheta\,d\vartheta}{(z-u)^3}=6\pi\left[\frac{1}{\zeta^2}-\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^4}\right]z\left(\frac{z}{r}-1\right)+\frac{3\pi}{\zeta r}\left[\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}-1\right]+\frac{6\pi\lambda^2\mu^2}{\zeta^2 r^3}+\frac{3\pi\lambda^4}{\zeta r^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3\vartheta\sin\vartheta d\vartheta}{(z-u)^3}=\frac{24\pi\lambda\mu}{\zeta^4}(\lambda^2-\mu^2)z\left(\frac{z}{r}-1\right)+\frac{12\pi\lambda\mu(\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^3 r}+\frac{3\pi\lambda\mu(\mu^2-\lambda^2)}{\zeta^2 r^3}+\frac{3\pi\lambda^3\mu}{\zeta r^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta d\vartheta}{(z-u)^3}=\frac{6\pi}{\zeta^2}\left(\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}-1\right)z\left(\frac{z}{r}-1\right)+\frac{3\pi}{\zeta r}\left(1-\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}\right)+\frac{\pi}{r^3}\left(1-\frac{6\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}\right)+\frac{3\pi\lambda^2\mu^2}{\zeta r^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\sin^3\vartheta d\vartheta}{(z-u)^3}=\frac{24\pi\lambda\mu}{\zeta^4}(\mu^2-\lambda^2)z\left(\frac{z}{r}-1\right)+\frac{12\pi\lambda\mu(\lambda^2-\mu^2)}{\zeta^3 r}+\frac{3\pi\lambda\mu(\lambda^2-\mu^2)}{\zeta^2 r^3}+\frac{3\pi\lambda\mu^3}{\zeta r^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4\vartheta d\vartheta}{(z-u)^3}=6\pi\left[\frac{1}{\zeta^2}-\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^4}\right]z\left(\frac{z}{r}-1\right)+\frac{3\pi}{\zeta r}\left[\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}-1\right]+\frac{6\pi\lambda^2\mu^2}{\zeta^2 r^3}+\frac{3\pi\mu^4}{\xi r^5}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^4\vartheta d\vartheta}{z-u}=\frac{2\pi}{\zeta^2}\left(\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}-1\right)(z^3-r^3)-\frac{4\pi\lambda^2(3\mu^2-\lambda^2)r}{\zeta^3}-\frac{\pi}{\zeta^3}(\lambda^4+6\lambda^2\mu^2-3\mu^4)z+\frac{2\pi\lambda^4}{\zeta^2 r}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^3\vartheta\sin\vartheta d\vartheta}{z-u}=\frac{8\pi\lambda\mu}{\zeta^4}(\mu^2-\lambda^2)(z^3-r^3)-\frac{2\pi\lambda\mu(3\mu^2-5\lambda^2)r}{\zeta^3}+\frac{2\pi\lambda^3\mu}{\zeta^2 r}-\frac{2\pi\lambda\mu}{\zeta^3}(3\mu^2-\lambda^2)z$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta d\vartheta}{z-u}=\frac{\pi}{\zeta}\left(1-\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}\right)\left[\frac{2(z^3-r^3)}{\zeta}-2r-z\right]+\frac{2\pi\lambda^2\mu^2}{\zeta^2 r}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta\sin^3\vartheta d\vartheta}{z-u}=\frac{8\pi\lambda\mu}{\zeta^4}(\lambda^2-\mu^2)(z^3-r^3)-\frac{2\pi\lambda\mu(3\lambda^2-5\mu^2)r}{\zeta^3}+\frac{2\pi\lambda\mu^3}{\zeta^2 r}-\frac{2\pi\lambda\mu(3\lambda^2-\mu^2)z}{\zeta^3}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^4\vartheta d\vartheta}{z-u}=\frac{2\pi}{\zeta^2}\left(\frac{8\lambda^2\mu^2}{\zeta^2}-1\right)(z^3-r^3)-\frac{4\pi\mu^2(3\lambda^2-\mu^2)r}{\zeta^3}-\frac{\pi}{\zeta^3}(\mu^4+6\lambda^2\mu^2-3\lambda^4)z+\frac{2\pi\mu^4}{\zeta^2 r}.$$

$$\int_0^{2\pi}\log(z-u)d\vartheta=\int_z^{\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-u}\right)dz\,d\vartheta+2\pi\log z=2\pi\int_z^{\infty}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{r}\right)dz+2\pi\log z=2\pi\log(z+r)$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\log(z-u)d\vartheta=\frac{2\pi\lambda}{\zeta}(r-z)$$

$$\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\log(z-u)d\vartheta=\frac{2\pi\mu}{\zeta}(r-z)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \pi\log(\varkappa+\nu) + \frac{\pi}{\zeta^2}(\lambda^2-\mu^2)\left(\varkappa\nu - \varkappa^2 + \frac{\zeta}{2}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \frac{\pi\lambda\mu}{\zeta} + \frac{2\pi\lambda\mu}{\zeta^2}\varkappa(\nu-\varkappa)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \pi\log(\varkappa+\nu) + \frac{\pi}{\zeta^2}(\mu^2-\lambda^2)\left(\varkappa\nu - \varkappa^2 + \frac{\zeta}{2}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \frac{2\pi\lambda}{3\zeta^3}(\lambda^2-3\mu^2)(\nu^3-\varkappa^3) + \frac{2\pi\lambda^3\nu}{\zeta^2} - \frac{\pi\lambda}{\zeta^2}(\lambda^2+3\mu^2)\varkappa$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \frac{2\pi\mu(3\lambda^2-\mu^2)}{3\zeta^3}(\nu^3-\varkappa^3) + \frac{2\pi\lambda^2\mu\nu}{\zeta^2} + \frac{\pi\mu(\lambda^2-\mu^2)\varkappa}{\zeta^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\vartheta \sin^2\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \frac{2\pi\lambda(3\mu^2-\lambda^2)}{3\zeta^3}(\nu^3-\varkappa^3) + \frac{2\pi\lambda\mu^2\nu}{\zeta^2} + \frac{\pi\lambda(\mu^2-\lambda^2)\varkappa}{\zeta^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^3\vartheta \log(\varkappa - u)\, d\vartheta = \frac{2\pi\mu}{3\zeta^3}(\mu^2-3\lambda^2)(\nu^3-\varkappa^3) + \frac{2\pi\mu^3\nu}{\zeta^2} - \frac{\pi\mu}{\zeta^2}(\mu^2+3\lambda^2)\varkappa.$$

TABLE DES MATIÈRES.

Page

CHAPITRE II. La dérivée première du potentiel d'une simple couche. Surface plane.

CHAPITRE III. La dérivée première du potentiel d'une simple couche. Surface courbe.

CHAPITRE IV. Les dérivées secondes du potentiel d'une simple couche. Surface plane.

THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES HYPERBOLIQUES ET DU PROBLÈME DE CAUCHY

PAR

JACQUES HADAMARD

à PARIS.

Les équations dont nous nous occuperons ici sont les analogues de l'équation des ondes sphériques, étudiée par POISSON et KIRCHHOFF, et de l'équation des ondes cylindriques, étudiée par M. VOLTERRA.[1]

La méthode employée pour les intégrer sera, au fond, celle que nous avons indiquée, pour le cas de trois variables, dans deux Mémoires intitulés *Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles.*[2] Le présent travail a pour but de reprendre cette méthode, pour l'étendre à un nombre quelconque de variables.

I. Formule fondamentale et solution fondamentale.

1. Nous rappellerons, dans ce premier Chapitre, un certain nombre de résultats connus ou empruntés aux Mémoires dont nous venons de parler.

Toutes les recherches faites jusqu'ici sur les équations linéaires aux dérivées partielles reposent sur l'emploi de la *formule fondamentale* et des *solutions fondamentales.*

[1] Acta Mathematica tome XVIII; 1894.

[2] Ann. Scient. E. Norm. série (3) t. XXI, p. 535—556, 1904 et t. XXII, p 101—141, 1905.

Pour l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, la formule fondamentale est la formule de Green. La solution fondamentale[1] est le potentiel élémentaire $\frac{1}{r^{n-2}}$ (n étant le nombre des dimensions) ou $\log \frac{1}{r}$ (pour $n = 2$).

La formule fondamentale s'étend aisément à l'équation linéaire générale (du second ordre). Soit

$$\text{(E)} \qquad F(u) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

cette équation, où $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont des variables indépendantes, u la fonction inconnue, pendant que $F(u)$ désigne un polynome différentiel

$$F(u) = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i \mathsf{a}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + lu$$

dans lequel les a_{ik}, les a_i, ainsi que l et le second membre f de l'équation, sont des fonctions données des variables indépendantes. Soient T une portion de l'espace à n dimensions, limitée (en tous sens) par une surface (multiplicité $n - 1$ fois étendue) S; dS, un élément de S; $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à S dirigée vers T, le facteur de proportionnalité étant positif et sa valeur absolue étant telle que l'on ait

$$\pi_n dS = \pm dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}.$$

Désignons enfin par A la forme quadratique

$$A = \sum_{i,k} a_{ik} \pi_i \pi_k.$$

On aura, entre une intégrale n^{uple} prise dans T et une intégrale $(n-1)^{\text{uple}}$ prise sur S, l'identité

$$\text{(1)} \quad \int\int \cdots \int_T [v F(u) - u G(v)] dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int \cdots \int_S \left(u \frac{dv}{dr} - v \frac{du}{dr} - Luv \right) dS$$

quelles que soient les fonctions u et v.

---

[1] Les *solutions fondamentales* que nous introduisons sont donc sans rapport direct avec les *fonctions fondamentales* que considère la théorie des équations à caractéristiques imaginaires.

Dans cette formule, $G(v)$ est le polynome différentiel *adjoint* à F

$$G(v) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(a_{ik} v) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathsf{a}_i v) + lv$$

[l'équation $G(v) = 0$ étant dite *l'adjointe*[1] de (E)]; quant à la dérivée $\frac{d}{d\nu}$, elle désigne le symbole de différentiation

$$\frac{d}{d\nu} = \sum_i \frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \pi_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

La direction de cosinus directeurs proportionnels à $\frac{dx_1}{d\nu}, \frac{dx_2}{d\nu}, \ldots, \frac{dx_n}{d\nu}$ est désignée sous le nom de *conormale*[2] à S. C'est la direction conjuguée du plan tangent à S par rapport au cône (cône *caractéristique*) représenté par l'équation tangentielle $A = 0$. Enfin la quantité L a l'expression

$$L = \sum_i \left(- \sum_k \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} + \mathsf{a}_i \right) \pi_i .$$

D'après sa définition, la direction conormale est tangente à S lorsque celle-ci est *caractéristique* c'est à dire que son plan tangent satisfait à l'équation $A = 0$. La direction conormale n'est alors autre que celle de la tangente à la *bicaractéristique*, — c'est à dire à la caractéristique de l'équation du premier ordre $A = 0$, — située sur S.

Nous désignerons par $\varDelta$ le discriminant de la forme A. Nous supposerons toujours, dans ce qui va suivre, que cette forme est *générale*, c'est à dire qu'on a $\varDelta \neq 0$. A admet alors une forme adjointe: nous désignerons par H cette forme adjointe divisée par $\varDelta$. La relation entre A et H est réciproque, et le discriminant D de H est l'inverse de $\varDelta$.

2. Les *solutions fondamentales* ont été, pour le cas de deux variables, découvertes par M. Picard,[3] retrouvées plus tard et appliquées au problème de

[1] L'équation adjointe est toujours prise sans second membre, même si l'équation donnée en a un.

[2] d'Adhémar, C. R. Ac. Sc. 11 février 1901. — On pourrait employer aussi la dénomination de *transversale*, empruntée au Calcul des Variations.

[3] C. R. Ac. Sc., 6 avril 1891.

Dirichlet par M. Sommerfeld.[1] Elles comprennent, dans ce cas, un terme holomorphe, augmenté d'un terme qui contient un logarithme en facteur.

Rappelons comment on peut former ces solutions pour un nombre quelconque de variables, en renvoyant pour les détails au premier des Mémoires précédemment cités.[2]

Soit $O\ (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un point donné de l'espace à n dimensions. Si nous déterminons les fonctions x_i, p_i de la variable s par les équations différentielles

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial p_i}} = \frac{-dp_i}{\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial x_i}} = ds \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les x_i ayant, pour $s = 0$, les valeurs initiales a_i et les p_i des valeurs arbitraires p_{0i}, les lignes décrites ainsi par le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne sont autres que des géodésiques relatives à l'élément linéaire

$$ds^2 = H(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Celles des lignes (2) sur lesquelles A est nul (et, par conséquent, sur lesquelles $H = 0$) ne sont autres que les bicaractéristiques. Sur les autres, s sera proportionnel à l'arc (mesuré relativement à l'élément linéaire H et compté à partir de O), avec un facteur de proportionnalité arbitraire sur chaque géodésique. Nous désignerons par Γ le carré de la distance géodésique, ainsi mesurée, entre le point O et le point $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Γ est une fonction holomorphe autour de O, son développement autour de ce point commençant par les termes

$$\Gamma = H(x_1 - a_1,\ x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n) + \cdots;$$

les dérivées partielles de Γ seront données par les formules

$$(3) \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = 2 s p_i.$$

Cela posé, si n est impair, *il existera une solution* (*et une seule à un facteur constant près*) *de la forme*

$$(3) \qquad u = \frac{v}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}},$$

où v est holomorphe autour du point O.

[1] Encyclopädie der Math. Wiss., II 7 c.

[2] Ann. Sc. Éc. Norm. Sup., 1904.

Pour n pair, au contraire, cette forme est remplacée par la suivante

$$u = \frac{v}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}} + v_0 \log \Gamma \tag{4'}$$

où v et v_0 sont des fonctions holomorphes. En outre, une telle solution n'est plus unique, car la forme ainsi écrite de la fonction u n'est pas altérée si on lui ajoute une fonction régulière quelconque, solution de l'équation $F(u) = 0$. Cette indétermination est d'ailleurs la seule que présente u: la fonction v_0 est unique (à un coefficient de proportionnalité constant près) et (sauf le même coefficient) la fonction v est déterminée à des termes près contenant en facteur $\Gamma^{\frac{n-2}{2}}$.

Quant au coefficient de proportionnalité, nous l'avions choisi dans les *Recherches sur les solutions fondamentales* de manière que la fonction v prenne la valeur 1 lorsqu'on fait coïncider le point $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec le point O. Nous modifierons légèrement ici cette convention: nous admettrons — ce qui est plus avantageux au point de vue de la *relation d'échange* (voir plus loin n° 21) — que U prend, au point O, non la valeur 1 mais la valeur $\frac{1}{+\sqrt{|\Delta|}}$. Le lecteur voudra bien tenir compte de cette discordance dans la comparaison de nos formules actuelles avec celles de notre précédent travail.

Une fois cette dernière convention établie, la *solution fondamentale* u est, dans le cas de n impair, une fonction parfaitement bien déterminée des $2n$ quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Considéré comme fonction du point M, u admet comme singularité la surface $\Gamma = 0$. Cette surface est le *conoïde caractéristique* de sommet O, lieu des bicaractéristiques issues de ce point.

3. C'est la solution fondamentale qui joue le rôle du potentiel élémentaire dans l'étude des équations à caractéristiques imaginaires (cas *elliptique*). La théorie a été développée, à ce point de vue, d'une manière complète par M. SOMMERFELD, dans l'article cité de l'Encyclop. der Math. Wiss.

Nous nous attacherons ici au cas *hyperbolique*, où A n'a pas tous ses carrés de même signe et où, par conséquent, le conoïde caractéristique est réel. C'est seulement dans ce cas que l'on a à se poser le problème de CAUCHY, c'est à dire celui qui consiste à déterminer une solution de l'équation d'après ses valeurs et celles d'une de ses dérivées premières sur une surface donnée.

Si l'on envisage ce problème dans l'hypothèse où il n'y a que deux variables indépendantes et où la solution est donnée par la méthode de RIEMANN, on y voit encore intervenir une fonction des coordonnées x, y, x', y' de deux points

du plan, laquelle rend les mêmes services que la solution fondamentale de M. Picard pour le problème de Dirichlet dans le plan, c'est à dire qu'il suffit de la substituer dans la formule fondamentale pour obtenir la valeur d'une intégrale de l'équation en fonction des données de Cauchy.

Cependant cette fonction de Riemann *n'est pas* l'analogue de la solution fondamentale. Mais elle présente avec elle une relation que j'ai établie en 1900, et exposée au Congrès international des Mathématiciens: [1] elle n'est autre que le coefficient du logarithme dans l'expression (4') de u. Nous retrouverons cette relation dans l'étude du cas général.

4. Si maintenant, pour passer à des équations à trois ou à quatre variables nous prenons les solutions de M. Volterra et de Kirchhoff, nous y verrons apparaître un caractère tout différent· Non seulement les fonctions utilisées par ces deux auteurs ont une singularité (au contraire de la fonction de Riemann, qui est régulière): mais elles ont toute une *ligne* de singularités, en dehors du conoïde caractéristique de sommet O.

Cette singularité a été le principal obstacle à la généralisation des méthodes de Kirchhoff et de M. Volterra. J'ai montré précédemment, pour le cas de $n = 3$, que cette généralisation s'opérait au contraire, d'elle-même lorsqu'on remontait à la solution fondamentale. La marche suivie à cet effet consistait à déduire de celle-ci les fonctions de M. Volterra, ce qui se fait par une quadrature. On pourrait l'étendre avec quelques complications, au cas de $n > 3$; je préfère laisser cet intermédiaire de côté et partir directement de la solution fondamentale. Il faut pour cela, recourir à un symbole, déjà employé dans notre précédent Mémoire, et dont, comme le constatait [2] au même moment M. d'Adhémar on ne peut éviter la présence lorsqu'on veut effectuer les différentiations indiquées par les formules de M. Volterra. L'intervention de ce symbole, formé de deux infinis qui se détruisent, a été jusqu'ici une des graves difficultés du problème. Je me propose, dans ce qui sa suivre de montrer qu'elle permet, au contraire, d'en obtenir, d'une manière simple et directe, la solution générale.

---

[1] Compte rendu du 2e Congrès Internat. p. 375. — Cette relation est indiquée à nouveau dans la Thèse de M. Andrae. Göttingen 1903; p. 18.

[2] Thèse, Paris, 1904.

II. Définition d'un nouveau symbole d'intégration.

5. Partons de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{1+\alpha}}\,dx \tag{5}$$

où l'exposant constant α satisfait aux inégalités

$$0 < \alpha < 1.$$

Nous aurons surtout en vue, dans ce qui va suivre, le cas où ces inégalités excluent l'égalité et nous nous placerons tout d'abord dans ce cas.

L'intégrale (5) n'a aucun sens. Mais, du moins si la fonction A satisfait à la condition de Lipschitz

$$|A(b) - A(x)| < K|b-x|,$$

on peut adjoindre à cette intégrale une expression de la forme

$$\frac{B(x)}{(b-x)^{\alpha}}$$

telle que la somme de cette quantité et de la précédente ait une valeur déterminée: je veux dire, telle que la quantité

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{1+\alpha}}\,dx + \frac{B(x)}{(b-x)^{\alpha}} \tag{6}$$

tende vers une limite lorsque x tend vers b. Il suffit, pour cela que la fonction B, remplissant également la condition de Lipschitz, satisfasse en outre à la relation

$$A(b) + \alpha B(b) = 0. \tag{7}$$

En effet, si, au lieu de $A(x)$ et $B(x)$, on introduit $A(x) - A(b)$, $B(x) - B(b)$, l'expression (6) s'écrit

$$\int_a^x \frac{A(x)-A(b)}{(b-x)^{1+\alpha}}\,dx + \frac{B(x)-B(b)}{(b-x)^{\alpha}} + \frac{A(b)}{\alpha}\left(\frac{1}{(b-x)^{\alpha}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha}}\right) + \frac{B(b)}{(b-x)^{\alpha}} \tag{6'}$$

et, moyennant la condition (7), elle tend vers la limite

$$\int_a^b \frac{A(x) - A(b)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx - \frac{A(b)}{\alpha(b-a)^\alpha}. \tag{8}$$

Le résultat demandé est donc obtenu. Mais une remarque essentielle se dégage de la forme de ce résultat.

L'expression (8) *ne contient pas la fonction B.* Elle est entièrement définie par la connaissance de l'intégrale donnée (5). Cela tient évidemment à ce que, dans l'expression (6'), l'ensemble des termes en $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ n'a pu cesser d'être infini que pour devenir nul, en vertu de l'inégalité $\alpha < 1$ et de la condition de Lipschitz vérifiée par la fonction B.

La quantité (8) sera dite la *partie finie* de l'intégrale (5) et désignée par le symbole

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{1+\alpha}} dx}\right. .$$

Plus généralement, prenons l'intégrale

$$\int_a^x \frac{A(x)}{(b-x)^{p+\alpha}} dx \qquad (0 < \alpha < 1)$$

où p est un entier positif, et supposons que la fonction A ait au moins $p-1$ dérivées, la dernière satisfaisant à la condition de Lipschitz. Si l'on veut, pour énoncer une condition un peu plus restrictive, mais plus simple, admettons que A ait au moins p dérivées finies.

Nous pourrons encore ajouter à cette intégrale une expression de la forme

$$\frac{B(x)}{(b-x)^{p-1+\alpha}} \tag{9}$$

de manière que la somme ait une valeur déterminée pour $x = b$. Il suffira que, dans le développement de ces deux expressions suivant les puissances croissantes (positives et négatives) de $b-x$, les termes en $(b-x)^{-(\alpha+p-1)}$, $(b-x)^{-(\alpha+p-2)}$, ..., $(b-x)^{-\alpha}$ se détruisent.

Cette addition peut se faire *d'une manière et d'une seule,* non que la fonction B satisfaisant à ces conditions soit unique, mais parce que (si nous lui imposons,

comme nous le ferons toujours, la condition d'être dérivable au moins autant de fois que A) elle est déterminée à des termes près de l'ordre de $(b-x)^p$, lesquels donnent un résultat nul dans la fraction (9).

Nous pouvons donc encore parler sans ambiguïté de la quantité

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+a}}dx}\right. \tag{10}$$

ou *partie finie* de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^{p+a}}dx.$$

6. La théorie des fonctions de variable imaginaire va nous donner une autre définition de l'expression (10).

Supposons la fonction A analytique et holomorphe pour $x=b$. (Si elle ne l'était pas, on appliquerait les mêmes considérations à une fonction analytique coïncidant avec A aux termes en $(b-x)^p$ près). Soit d'abord l'intégrale

$$I=\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^a}dx, \tag{11}$$

qui a une valeur finie, au sens classique.

On a

$$I=\frac{1}{1-e^{2i\pi a}}\int_L \frac{A(x)}{(b-x)^a}dx$$

L étant un lacet (fig. 1) qui va de a en b et revient en a après une rotation directe autour de b et le dénominateur ayant sa détermination réelle et positive sur la première branche.



Fig. 1.

Considérons, de même, l'expression.

$$\frac{1}{1-e^{2i\pi a}}\int_L \frac{A(x)}{(b-x)^{p+a}}dx. \tag{12}$$

Elle est égale à l'expression (10)

Pour démontrer qu'il en est ainsi, comme on peut, en développant le numérateur par la formule de Taylor, décomposer l'intégrale (10) en une intégrale de la forme (11) et plusieurs autres de la forme

$$A\left|\overline{\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{p+\alpha}}}\right.$$

(A étant constant), il suffit de faire la vérification pour ces dernières. Or, dans ce cas, les expressions (10) et (12) ont la valeur commune[1] $-\dfrac{A}{(p+\alpha-1)(b-a)^{p+\alpha-1}}$. Le fait peut d'ailleurs être considéré comme évident à priori, l'intégrale prise suivant un petit cercle de centre b étant manifestement d'ordre fractionnaire par rapport au rayon de ce cercle.

De même, la partie finie de l'intégrale

$$\overline{\int_a^b \frac{A(x)}{[(x-a)(b-x)]^{p+\alpha}}}$$



Fig. 2.

(qui est infinie aux deux extrémités a et b) pourra se calculer, soit en décomposant l'intervalle (a, b) en deux par une limite intermediaire c, soit par intégration le long d'une ligne L allant de a en b et revenant avec rotation directe (fig. 2) autour de l'un des points a, b et inverse autour de l'autre.



Fig. 3.

Dans le cas de $\alpha = \frac{1}{2}$, qui est celui dont nous auron à faire usage, les sens des rotations sont indifférents et on peut donner à L la forme classique représentée (fig. 3). Le facteur $\dfrac{1}{1-e^{2i\pi\alpha}}$ a, dans ce cas, la valeur $\frac{1}{2}$.

6 bis. Les remarques du n° précédent entraînent cette conséquence, importante pour nous, que *l'expression* (10) *admet la différentiation sous le signe* $\int$, *même lorsque la limite b est variable.* Il suffit de ne pas écrire, dans la dérivée, le terme correspondant à cette variabilité. Ainsi on a

$$(13)\qquad \frac{d}{dt}\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x,t)}{[b(t)-x]^{p+\alpha}}dx}\right. = \left|\overline{\int_a^b \left[\frac{\frac{\partial A}{\partial t}}{(b-x)^{p+\alpha}} - (p+\alpha)\frac{db}{dt}\frac{A}{(b-x)^{p+\alpha+1}}\right]dx}\right.$$

C'est ce qui se voit immédiatement sur la forme (12) de l'intégrale (10).

La formule est encore valable pour $p = 0$: le second membre de cette formule donne alors la dérivée, par rapport à t, de l'intégrale (ordinaire) (11),

[1] On remarquera que cette valeur est *négative*, pour $A > 0$, quoique la quantité sous le signe $\int$ soit positive. Autrement dit, c'est le terme complémentaire (9) qui donne son signe.

7. Quelques-unes des considérations précédentes s'étendraient à l'intégrale

$$\int_a^b \frac{A(x)}{(b-x)^p} dx \tag{14}$$

On ramènerait celle-ci à être finie par l'addition des termes

$$\frac{B(x)}{(b-x)^{p-1}} + B_1(x) \log(b-x). \tag{15}$$

Mais, pour $p > 1$, on pourrait en ajoutant à $B(x)$ des termes en $(b-x)^{p-1}$, modifier le résultat d'une manière arbitraire. Ce résultat n'est donc pas déterminé par la connaissance de l'intégrale (14), mais exige celle des termes additifs (15).

Il n'en est pas de même pour $p = 1$. Mais, par contre, le résultat obtenu n'est pas invariant par un changement de variable. Cette invariance a, au contaire, lieu pour α fractionnaire,[1] ainsi qu'il est évident sur l'une ou autre des deux définitions données plus haut. Ceci n'empêche pas d'ailleurs l'expression correspondant à $p = 1$ d'avoir son utilité. C'est sous cette forme par exemple que se présentent les dérivées secondes du potentiel spatial,[2] ou plutôt sous la forme analogue relative à une intégrale multiple.

8. Le cas des intégrales multiples se ramène, en effet, immédiatement au précédent.

Soit une multiplicité T à n dimensions, dont un point est défini par les coordonnées $x_1, x_2, \ldots x_n$, et dont l'élément sera désigné par $d\tau_n$, multiplicité délimitée par une frontière σ définie par l'équation

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \tag{16}$$

Sur σ, soient prises des coordonnées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, et par chaque point de Γ, menons une ligne l, qui varie continûment et n'est pas tangente à Γ. En considérant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \Gamma$ comme des coordonnées curvilignes dont les $n-1$ premières restent constantes sur chaque ligne l, l'élément à n dimensions $d\tau_n$ pourra être mis sous la forme

$$K d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}\, d\Gamma. \tag{17}$$

[1] Il est clair, toutefois, qu'on suppose le changement de variable régulier en b.

[2] Cette expression est aussi en relation évidente avec la *valeur principale* de Cauchy.

Soit maintenant l'intégrale

$$(18) \qquad \int\int\cdots\int \frac{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Gamma^{p+a}} d\tau_n$$

que nous pourrons écrire sous la forme

$$(18') \qquad \int\int\cdots\int \frac{A}{\Gamma^{p+a}} \cdot K d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1} d\Gamma.$$

Etendue à la portion d'espace à n dimensions délimitée par la frontière (16), elle cesse d'avoir un sens.

La *partie finie*

$$\overline{\left|\int\int\cdots\int \frac{A}{\Gamma^{p+a}} d\tau_n\right.}$$

de cette intégrale sera, par définition,

$$(19) \qquad \underbrace{\int\int\cdots\int}_{n-1} d\lambda_1 d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1} \cdot \overline{\left|\int_l \frac{K A d\Gamma}{\Gamma^{p+a}}\right.}$$

Les coordonnées curvilignes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \Gamma$ et, par conséquent, la transformation (18') ne pourront, en général, être employées que dans le voisinage de la frontière. Il y aura donc lieu, en général, de diviser le domaine T en deux parties, l'une centrale T_1 où l'intégrale s'évaluera à la manière ordinaire, l'autre T_2, comprenant le voisinage de σ_1 où l'on adoptera l'expression (18').

Nous obtenons la partie finie de l'intégrale simple suivant l en la prenant non plus depuis le point de départ $\Gamma = 0$ de cette ligne, mais depuis un point infiniment voisin $\Gamma = h$, et ajoutant un terme complémentaire

$$(19') \qquad \frac{B}{h^{p+a-1}}$$

où B est une fonction régulière de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, h$ et, par conséquent, de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

h variera d'ailleurs suivant une loi quelconque en fonction des coordonnées λ, sous la seule condition d'être partout très petit. Appelons σ' la multiplicité décrite par le point $\Gamma = h$ et qui devra tendre vers σ de manière que h tende uniformément vers zéro.

La quantité précédente (19'), intégrée par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, donnera évidemment une intégrale $n - 1^{\text{uple}}$ étendue à la multiplicité σ', soit

$$(20) \qquad \int\int\cdots\int_{\sigma'} \frac{B}{\Gamma^{p+\alpha-1}} d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}$$

et la valeur de l'expression (19) sera la limite vers laquelle tendra la somme de l'intégrale n^{uple} (18) et de l'intégrale $n - 1^{\text{uple}}$ (20), limite qui sera indépendante de la loi suivant laquelle la surface σ' tendra vers σ.

Elle sera également indépendante du choix des coordonnées curvilignes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et de celui des lignes l.

Ce dernier point n'est pas une conséquence évidente de la manière dont nous avons obtenu le terme complémentaire (20); mais il résulte immédiatement de la forme de ce terme.

Choisissons, en effet, pour fixer les idées, la multiplicité σ' de manière que les rapports mutuels des valeurs de h tendent vers des limites finies. Soit, par exemple, δ la distance interceptée entre σ et σ' sur une ligne déterminée quelconque (sécante à σ). Nous pouvons supposer que la position de σ' est exprimée en fonction de δ et cela de manière que h soit une fonction continue et dérivable (jusqu'à l'ordre p) de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \delta$.

Dans ces conditions, *le terme* (20) est *infini d'ordre fractionnaire en* δ, avec numérateur régulier. D'après les considérations développées précédemment, cette condition et celle de transformer l'intégrale (18) en une quantité finie déterminent complètement ce terme, ou du moins le résultat obtenu en fin de compte: c'est ce que nous voulions établir.

9. Dans le cas de $p = 1$, on peut aisément écrire le terme complémentaire sous une forme manifestement indépendante des éléments arbitraires. En effet, pour $\Gamma = 0$, le nombre K est indépendant du choix des lignes l: il est égal à la valeur commune du rapport

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}{D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})} : \frac{\partial \Gamma}{\partial x_n}$$

et des rapports analogues. On peut, dès lors, introduire l'élément

$$d\sigma_{n-1} = K d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}$$

de la multiplicité (16), et remarquer que cet élément, indépendant, à son tour, du choix des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, est entièrement défini par l'égalité

$$d\sigma_{n-1}\, d\Gamma = d\tau_n$$

puis écrire la partie finie cherchée sous la forme

$$\int\int\cdots\int_T \frac{A}{\Gamma^{1+\alpha}}\,d\tau_n + \frac{1}{\alpha}\int\cdots\int_\sigma \frac{A}{\Gamma^{\alpha}}\,d\sigma_{n-1}$$

où il est entendu que l'on doit tout d'abord remplacer σ par σ' (en limitant l'intégrale n^{uple} à σ') puis faire tendre σ' vers σ.

On remarquera que, pour calculer la partie utile du second terme, il suffit de connaître les valeurs de A sur la frontière σ, comme s'il s'agissait d'une intégrale ordinaire. Ceci n'a plus lieu pour $p > 1$.

10. Enfin, il est essentiel de nous rappeler que tout ce qui précède suppose vérifiées les conditions suivantes:

1°. A admet des dérivées jusqu'à l'ordre p (ou jusqu'à l'ordre $p-1$, avec la condition de Lipschitz);

2°. σ n'admet pas de points singuliers aux environs desquels Γ soit d'ordre supérieur au premier par rapport à la distance du point $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ à σ.

Les considérations precédentes s'étendent cependant encore au cas où Γ est le produit de deux facteurs $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, de manière que σ se compose de deux parties $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ sécantes entre elles: c'est ce qui arriverait, par exemple, si T était un rectangle, Γ désignant le produit des quatre côtés.

Cela résulte de ce qu'on peut encore ramener l'intégrale à être finie en retranchant des termes complémentaires en

$$\frac{M}{\Gamma^{(1)(p+\alpha-1)}}, \quad \frac{M}{\Gamma^{(2)(p+\alpha-1)}}, \quad \frac{M}{\Gamma^{(1)(p+\alpha-1)}\cdot\Gamma^{(2)(p+\alpha-1)}}$$

(M désignant des quantités régulières) et la troisième catégorie de termes possède, comme les deux premières, la propriété de ne pouvoir rester finis pour toutes les valeurs infiniment petites de $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$ sans être nuls.

La méthode est, bien entendu, applicable si, l'aire d'intégration étant un rectangle, Γ représente le produit des premiers membres des équations de deux côtés opposés; et d'une manière générale, si la frontière se compose d'une partie σ où Γ est nul et d'une autre s où il est différent de zéro.

Il n'en est plus de même pour d'autres singularités de σ. Nous serons obligés de traiter de telles singularités comme on traite les infinis de la quantité sous le signe $\int$ dans la théorie classique, c'est à dire de les isoler tout d'abord par une frontière auxiliaire Σ et de rapprocher indéfiniment celle-ci de la singularité.

Les résultats mêmes auxquels nous parviendrons ainsi montreront qu'il n'aurait pas été légitime d'opérer directement.

11. Il importe de pouvoir assigner une limite supérieure aux expressions que nous venons d'étudier, comme on le fait pour les intégrales ordinaires. S'il s'agit, d'abord, de l'integrale simple

$$I = \left|\overline{\int_a^b \frac{A\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}}}\right|,$$

on obtiendra cette limite supérieure en retranchant de A les premiers termes de son développement de Taylor, comme nous l'avons expliqué plus haut. Si (A_n) est une limite supérieure du module de la $n - 1^{\text{ème}}$ dérivée de A dans l'intervalle (a, b), on a

$$(22)\qquad K|I| < (A_p)\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} + \frac{|A(a)|}{(b-a)^{p+\alpha-1}} + \frac{|A'(a)|}{(b-a)^{p+\alpha-2}} + \cdots + \frac{|\overset{(p-1)}{A(a)}|}{(b-a)^\alpha}$$

K étant un coefficient numérique qui dépend exclusivement du nombre p.

Il pourra, évidemment, y avoir lieu de n'appliquer la transformation que dans une partie de l'intervalle d'intégration.

C'est ce que l'on fera, en général, dans le cas de l'intégrale multiple

$$(18)\qquad \overline{\int \cdots \int \frac{A}{\Gamma^{p+\alpha}}\,d\tau_n}.$$

On évaluera à la manière ordinaire l'intégrale relative à la partie du domaine que nous avons appelée T_1. Dans T_2, on partira de l'expression (22). D'après ce que nous venons de trouver, le résultat ainsi obtenu sera de la forme

$$(23)\qquad L[(A_0)+\cdots+(A_p)]\int \cdots \int_{T_2} \frac{1}{\Gamma^\alpha}\,d\tau_n + L'\,\frac{(A_0)+\cdots+(A_{p+1})}{(\Gamma)^{p+\alpha-1}}\,\sigma_1 + \left|\int \cdots \int_{T_1} \frac{A}{\Gamma^{p+\alpha}}\,d\tau_n\right|$$

où (A_n) est le maximum du module des dérivées partielles d'ordre n de la fonction A dans T_2, (Γ), le minimum du module de Γ sur σ_1; L, L' des quantités dépendant de Γ et du choix des lignes l.

Il serait évidemment désirable de préciser cette formule en donnant des expressions de L, L'. Telle qu'elle est, elle suffira pour les applications que nous nous proposons d'en faire.

12. Non seulement la définition de notre symbole suppose l'existence des dérivées de A, mais, comme on le voit, sa valeur n'est limitée qu'en fonction de ces dérivées. De fait, il est facile d'indiquer des expressions de cette nature qui

prennent des valeurs aussi grandes qu'on le veut quoique A reste toujours fini. Il suffit — pour nous borner au cas des intégrales simples — de prendre la suivante

$$(24) \qquad I = \left|\overline{\int_0^a \frac{f(\mu x)}{x^{p+\alpha}}\, dx}\right.$$

μ étant un nombre positif très grand et f une fonction finie quelque grand que soit x. En faisant le changement de variable $\mu x = z$, on voit immédiatement qu'on aura l'égalité asymptotique

$$(25) \qquad I = \mu^{p+\alpha-1} I_1$$

$$I_1 = \left|\overline{\int_0^\infty \frac{f(z)\, dz}{z^{p+\alpha}}}\right.$$

Si donc I_1 est différent de zéro, I augmentera indéfiniment comme $\mu^{p+\alpha-1}$. C'est ce qui arrivera en particulier si les p premières dérivées de f conservent chacune un signe constant depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$ et sont nulles à l'infini; on aura alors:

$$I_1 = \frac{(-1)^p}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)} \int_0^\infty \frac{f^{(p)} z}{z^\alpha}\, dz.$$

13. Nous aurons à envisager, au point de vue qui précède, l'intégrale

$$\int \frac{dz}{(z^2-\alpha)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Prenons-la d'abord entre $+\sqrt{\alpha}$ et le nombre fixe $z_1 > \sqrt{\alpha}$. Pour $n = 0$, on a

$$\int_{\sqrt{\alpha}}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{z^2-\alpha}} = \log \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - \alpha}}{\sqrt{\alpha}} = -\tfrac{1}{2}\log\alpha + P(\alpha),$$

où

$$(26) \qquad P(\alpha) = \log\left(z_1 + \sqrt{z_1^2-\alpha}\right) = \log z_1 + \log\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha}{z_1^2}}\right)$$

est une série entière par rapport à α.

On en déduit, par différentiation,

$$(27) \qquad \left|\overline{\int_{\sqrt{\alpha}}^{z_1} \frac{dz}{(z^2-\alpha)^{n+\frac{1}{2}}}}\right. = \frac{(-1)^n}{2nC_n}\,\frac{1}{\alpha^n} + \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})}\,\frac{d^n}{d\alpha^n} P(\alpha),$$

C_n désignant le coefficient numérique

$$(28) \qquad C_n = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots (n - \frac{1}{2})}{1 \cdot 2 \ldots n} = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}.$$

Pour $z_1 = \infty$, le dernier terme disparaît (en vertu de l'égalité (26)) dans le second membre de la formule (27). On a donc

$$(29) \qquad \int_{\sqrt{\alpha}}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 - \alpha)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^n}{2n C_n} \frac{1}{\alpha^n}.$$

Nous devrons également noter la valeur de l'intégrale pour $n < 0$, soit

$$(27') \qquad \int_{+\sqrt{\alpha}}^{z_1} dz (z^2 - \alpha)^{n' - \frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{n'-1}}{2} C_{n'} \alpha^{n'} \log \alpha + P(\alpha),$$

C_n désignant le même coefficient numérique que précédemment.

Mais les formules relatives au cas où les limites sont $-\sqrt{\alpha}$, $+\sqrt{\alpha}$ sont spécialement importantes pour la suite.

L'intégrale

$$(30) \qquad \int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} \frac{dz}{(\alpha - z^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

est nulle.

L'intégrale

$$\int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} dz (z^2 - \alpha)^{n'-1} \sqrt{\alpha - z^2}$$

est égale à πA, *A désignant le coefficient de* $\log \alpha$ *dans l'expression* (27') *soit*

$$(30') \qquad \int_{-\sqrt{\alpha}}^{+\sqrt{\alpha}} dz (z^2 - \alpha)^{n'-1} \sqrt{\alpha - z^2} = \frac{(-1)^{n'-1}}{2} \pi C_{n'} \alpha^{n'}.$$

Ces résultats se vérifient directement sans difficulté, mais on les obtient immédiatement en observant que les intégrales que nous venons d'écrire peuvent, au facteur $2i$ près, être considérées comme les périodes des précédentes, dues au pôle $z = \infty$.

13 bis. Considérons la quadrique à n dimensions

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 1 \tag{31}$$

analogue à l'hyperboloïde à une nappe, et le volume (à n dimensions) compris entre cette quadrique et le *cône asymptote*

$$x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0 . \tag{32}$$

Posons

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_{n-1}^2} = \frac{x_n}{z} \cdot$$

Cette équation, pour chaque valeur de z représente un cône. L'élément de volume compris entre ce cône, le cône analogue infiniment voisin et la surface (31) est

$$\Omega_{n-2} \frac{1}{n} r^n dz = \frac{\Omega_{n-2}}{n} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)^n}}$$

Ω_{n-2} désignant la surface de l'hypersphère de rayon 1 dans l'espace à $n-1$ dimensions. Cette quantité est égale à $2\frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$, c'est à dire (pour n impair) à $2\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$.

L'intégrale de la différentielle précédente, prise entre -1 et $+1$, est infinie; mais, pour n impair (seul cas qui nous intéresse) *sa partie finie est nulle*, ainsi que nous venons de le constater.

Prenons, au contraire, la quadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = -1$$

qui, pour $n = 3$, donne l'hyperboloïde à deux nappes. Considérons encore le volume compris entre la nappe qui correspond à $x_n > 0$ et le cone asymptote (32).

Ce volume sera représenté par l'intégrale

$$\frac{\Omega_{n-2}}{n} \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)^n}},$$

que nous devrons prendre entre 1 et $+\infty$. Si n est impair et égal à $2n_1+1$, l'expression ainsi obtenue a une partie finie, qui est égale à

$$\frac{\Omega_{2n_1-1}}{2n_1+1} \frac{(-1)^{n_1}}{2n_1 C_{n_1}}.$$

Par exemple, pour l'hyperboloïde à deux nappes ordinaire, il vient

$$\frac{2\pi}{3}\left|\int_1^x \frac{dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right| \doteq -\frac{2\pi}{3}.$$

Si l'hyperboloïde à deux nappes est donné sous la forme

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

(H étant une forme quadratique à un carré positif et $n-1 = 2n_1$ carrés négatifs) notre résultat devra évidemment être divisé par $+\sqrt{D}$, D étant le discriminant de H.

Le signe de la partie finie cherchée dépend, on le voit, de la parité de $\frac{n-1}{2}$.

14. Notons enfin que ce qui a été dit au n° 6 bis, sur la différentiation sous le signe $\int$, s'étend évidemment aux intégrales multiples, en vertu de la formule (19) qui sert de définition aux parties finies de ces intégrales.

Si la fonction à intégrer est infinie (d'ordre fractionnaire) sur toute la limite d'intégration, aucun terme correspondant à la variabilité de cette limite ne devra être inscrit. Dans le cas contraire, on devra tenir compte (s'il y a lieu) de la variation d'une portion de la frontière, celle où la quantité sous le signe $\int$ reste finie.

III. Equations à un nombre impair de variables.

15. Ces principes étant rappelés, nous pouvons aborder l'étude du problème de Cauchy relatif à l'équation

$$F(u) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{E}$$

D'après ce qui précède, il est à prévoir que nous aurons à distinguer le cas de n pair de celui de n impair. Nous commencerons par ce dernier.

La solution fondamentale est alors unique.

Elle ne contient pas de terme logarithmique, mais un dénominateur irrationnel.

Nous aurons d'ailleurs surtout à considérer, non la solution fondamentale de l'équation proposée, mais celle de l'équation adjointe

$$G(v) = 0: \tag{E$_1$}$$

cette solution sera de forme entièrement semblable à la précédente, savoir

$$v = v(x/a) = \frac{V}{\Gamma^{n_1 - \frac{1}{2}}} \cdot \tag{33}$$

pour $n = 2n_1 + 1$.

Γ est toujours le carré de la distance géodésique des deux points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et V, une fonction holomorphe des $2n$ coordonnées de ces deux points, prenant, lorsque ceux-ci coïncident, la valeur $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$.

Nous supposons que l'équation considérée appartient au type *hyperbolique* et, plus spécialement, à ce que nous apellerons le type hyperbolique *normal*, celui où la forme quadratique

$$A = \sum a_{ik} \pi_i \pi_k$$

a tous ses carrés de même signe à l'exception d'un seul. Le conoïde caractéristique se compose alors de deux nappes distinctes[1] et divise l'espace en *trois* régions, deux intérieures à chacune des nappes, la troisième extérieure. On peut toujours admettre (en changeant au besoin tous les signes dans l'équation donnée) que Γ est positif lorsque chacun des points dont il dépend est intérieur au conoïde caractéristique issu de l'autre: ceci revient à dire que A comprend un carré positif et $n - 1$ carrés négatifs.

Le problème de Cauchy consiste à déterminer une intégrale u de l'équation (E), connaissant les valeurs de u et celles de ses dérivées premières — il suffit de se donner la dérivée *conormale* — le long d'une certaine multiplicité $n - 1^{\text{uple}}$ S.

Nous supposerons essentiellement, en ce moment, qu'il s'agit du problème *intérieur*, c'est à dire que la multiplicité S ne coupe qu'une nappe du conoïde caractéristique Γ ayant pour sommet un point quelconque O $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et que cette nappe délimite sur elle une portion fermée en tous sens intérieure à la nappe en question. C'est ce qui arrivera (du moins tant que le point O reste dans une certaine région voisine de S, à laquelle nous nous limiterons), si le plan tangent à S en chacun de ses points est extérieur au cône caractéristique ayant pour sommet ce point, et dans ce cas seulement.

Cette circonstance ne peut pas se présenter pour des cas hyperboliques autres que le cas hyperbolique normal: alors tout plan passant par le sommet d'un cône caractéristique coupe ce cône suivant une infinité de génératrices

[1] Coulon, Thèse, Paris, Herrman, 1902, p. 30.

Les équations appartenant aux types hyperboliques non normaux n'admettent donc point de problèmes intérieurs.

Nous constaterons que ce problème *intérieur* est toujours possible (et déterminé) sans autres conditions imposées aux données que certaines conditions simples de dérivabilité (en particulier sans qu'il soit nécessaire de supposer ces données analytiques). Au contraire, lorsqu'il est extérieur — et, par conséquent, dans tous les cas lorsque l'équation appartient au type elliptique ou à un type hyperbolique non proprement dit — le problème de Cauchy cesse d'être possible en général.

16. Soit donc donnée la multiplicité S, en chaque point de laquelle on donne la valeur de u, intégrale de l'équation (E) et celle et sa dérivée conormale; et soit $O(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un point de l'espace à n dimensions où nous voulons calculer la valeur de u. Le conoïde caractéristique Γ de sommet O est supposé couper S suivant une multiplicité $n-2^{\text{uple}}$ fermée qui délimite une portion S_0 de S intérieur à Γ. Il délimite, d'autre part, avec S une portion déterminée T de l'espace à n dimensions, celle qui est à la fois intérieure à Γ et située du même côté de S que le point O.

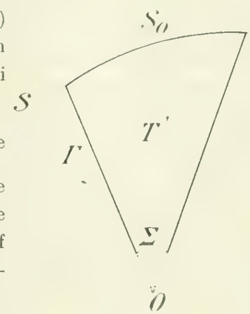


Fig. 4

Nous appliquerons la formule fondamentale (1) dans le domaine T à l'inconnue u et à la solution fondamentale $v(M, O)$ de l'équation adjointe qui est singulière en O.

La quantité $vf = \dfrac{fV}{\Gamma^{n_1 - \frac{1}{2}}}$ est infinie sur une partie de la frontière, à savoir le conoïde Γ. Elle est infinie d'ordre fractionnaire $n_1 - \frac{1}{2}$. L'intégrale n^{uple} qui porte sur cette quantité relève donc (sauf pour $n_1 = 1$, c. à d. $n = 3$) des considérations développées dans ce qui précède.

Mais il y a exception pour le voisinage du point O, où Γ est infiniment petit d'ordre 2 et non d'ordre 1. Nous devrons donc opérer comme on le fait dans le cas des intégrales multiples ordinaires et retrancher du domaine d'intégration tout le voisinage du point O, par une petite surface Σ (fig. 4)[1] entourant ce point, telle qu'une petite sphère de centre O.

[1] La figure 4 est supposée obtenue en coupant celle que l'on a à considérer (laquelle est à n dimensions) par un plan à deux dimensions mené par le point O.

Soit T' ce qui reste de T après qu'on a enlevé tout ce qui est intérieur à Σ. La formule fondamentale

$$(34)\qquad \int\int\cdots\int vf\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n + \int\int\cdots\int\left(v\frac{du}{d\nu} - u\frac{dv}{d\nu} + Luv\right)dS = 0$$

va être appliquée dans le domaine T', avec la convention de prendre la partie finie du premier membre, par suppression des infinis fractionnaires en Γ. On devra donc

1°. Prendre la partie finie de la première intégrale (34) (intégrale n^{uple} relative à T');

2°. Prendre de même la partie finie de l'intégrale $n-1^{\text{uple}}$ relative à la multiplicité donnée S. Le terme complémentaire sera une intégrale $n-2^{\text{uple}}$, prise (à la limite) suivant γ, intersection de S avec Γ;

3°. *Supprimer l'intégrale relative à la frontière* Γ, cette intégrale étant infinie d'ordre fractionnaire. Cette même intégrale s'élimine dans la méthode de Kirchhoff, parce quelle s'intègre exactement, et dans celle de M. Volterra, parce qu'elle est identiquement nulle. Le même fait se produit ici, comme on le voit, par un mécanisme différent.

4°. Restera enfin l'intégrale relative à Σ, dont nous devrons (comme sur S) prendre la partie finie. Nous avons à voir ce que devient cette quantité lorsque Σ tend vers le point O.

Menons, par ce point, des géodésiques (définies par les équations différentielles (2)) intérieures à Γ, et qui dépendent de $n-1$ paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$, pendant que, sur chacune d'elles, un point quelconque sera défini par la variable s du n° 2. s aura, en chaque point de Σ, une valeur déterminée (infiniment petite), fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. L'intégrale

$$(35)\qquad \left|\overline{\int\int\cdots\int_{\Sigma}\left(v\frac{du}{d\nu} + Luv\right)dS}\right. = \left|\overline{\int\cdots\int_{\Sigma}\frac{\left(V\frac{du}{d\nu} + LuV\right)}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}}dS}\right.$$

tendra vers zéro. Les quantités

$$x_i\,dS = \pm\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})}d\lambda_1\,d\lambda_2\ldots d\lambda_{n-1}$$

qui figurent au numérateur sous le signe $\int\ldots\int$, sont en effet, de l'ordre de s^{n-1}, au lieu que le dénominateur

$$\Gamma^{\frac{n-2}{2}} = s^{n-2}\,H^{\frac{n-2}{2}}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$$

$\left(\text{où } x'_i = \frac{dx_i}{ds}\right)$ ne contient que s^{n-2} en facteur. Le coefficient de

$$\frac{1}{H^{\frac{n-2}{2}}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)}$$

est donc de l'ordre de s et il en est de même de ses dérivées des divers ordres par rappart à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Dans ces conditions, l'évaluation obtenue au nº 11 montre[1] que l'intégrale (35) est également de l'ordre de s.

Ceci s'applique encore, dans le terme

$$-\iint\cdots\int u\frac{dv}{d\nu}dS$$

à la partie

$$-\iint\cdots\int \frac{u\frac{dV}{d\nu}}{\Gamma^{\frac{n-2}{2}}}dS$$

non différentiée par rapport à Γ.

17. Prenons enfin la partie restante

$$+\frac{n-2}{2}\iint\cdots\int \frac{uV\frac{d\Gamma}{d\nu}}{\Gamma^{\frac{n}{2}}}dS = +\frac{n-2}{2}\iint\cdots\int \frac{\frac{1}{2}uV\sum\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial\pi_i}\,dS}{\Gamma^{\frac{n}{2}}}.$$

On a (toujours avec les notations du nº 2)

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i} = 2sp_i$$

et, par conséquent,

$$\sum_i \frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial A}{\partial\pi_i} = 2s\sum_i p_i\frac{\partial A}{\partial\pi_i} = 2s\sum_i \pi_i\frac{\partial A}{\partial p_i} = 4s\sum_i \pi_i\frac{dx_i}{ds}.$$

Mais, si nous nous reportons à l'expression de $\pi_i dS$ écrite plus haut, nous voyons que le coefficient de $4s$ (multiplié par dS) n'est autre qu'un développement du déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{ds} & \frac{dx_2}{ds} & \cdots & \frac{dx_n}{ds} \\ \frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1} & \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial\lambda_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial\lambda_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial\lambda_{n-1}} \end{vmatrix} d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}$$

[1] Notre raisonnement suppose néanmoins que la surface Σ est régulière et que les dérivées (jusqu'à un ordre suffisament élevé) de s par rapport aux λ sont du même ordre que s.

les λ étant pris dans un ordre tel que le déterminant soit positif, puisque la direction des s croissants s'éloigne de O et pénètre dans le domaine T'.

Toutes les lignes du déterminant précédent, à l'exception de la première, contiennent s en facteur,[1] de sorte que la quantité sous le signe $\int \ldots \int$ (pour des valeurs déterminées des λ) reste finie quand s tend vers zéro.

On a d'autre part, sensiblement

$$uV = \frac{1}{\sqrt{\Delta_O}} u(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} u_O$$

le mot *sensiblement* ayant un sens un peu différent de celui qu'il a ordinairement en pareil cas, et voulant dire que les quantités négligées *ainsi que leurs dérivées par rapport aux* λ (jusqu'à l'ordre n_1) sont très petites.

Toujours au même point de vue, nous pouvons remplacer les $\frac{dx_i}{ds}$ par les valeurs x'_i qu'ils ont à l'origine, et les dérivées $\frac{\partial x_i}{\partial \lambda}$ par $s\frac{\partial x'_i}{\partial \lambda}$: nous avons donc finalement l'expression

$$(36) \qquad \frac{\frac{n-2}{2} u_O}{\sqrt{\Delta}} \int\int \cdots \int \frac{\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \cdots & x'_n \\ \frac{\partial x'_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial x'_n}{\partial \lambda_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x'_1}{\partial \lambda_{n-1}} & \cdots & \cdots & \frac{\partial x'_n}{\partial \lambda_{n-1}} \end{vmatrix}^2 d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1}}{H^{\frac{n}{2}}(x'_1, \ldots, x'_n)}.$$

L'intégrale qui est multipliée par $\left(\frac{\frac{n-2}{2}}{\sqrt{\Delta}}\right) u_O$ est en rapport direct avec le volume de l'hyperboloïde à deux nappes

$$(37) \qquad H(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n) = -1,$$

de l'espace à n dimensions.

Comme on le voit aisément, elle est égale à n fois la partie finie du volume compris entre une nappe de l'hyperboloïde (37) et son cône asymptote. Cette partie finie a été calculée plus haut (nº 13 bis), nous l'avons trouvée égale (pour $n = 2n_1 + 1$) à

---

[1] Chaque élément contient, il est vrai, outre une partie proportionnelle à s, une partie qui contient les dérivées de cette quantité par rapport aux λ.

$$\frac{\Omega_{2n_1-1}(-1)^{n_1}}{2n_1(2n_1+1)C_{n_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{D}},$$

D étant le discriminant de H. L'intégrale suivant Σ a donc (en vertu de l'égalite $D\Delta = 1$) la valeur limite

$$\frac{(-1)^{n_1}\Omega_{2n_1-1}}{2n_1 C_{n_1}}\cdot(2n_1-1)u_O = (-1)^{n_1}\frac{\Omega_{2n_1-1}}{C_{n_1-1}}\cdot u_O = (-1)^{n_1}\,.\,2\pi\Omega_{2n_1-2}\,.\,u_O$$

et *la valeur cherchée de u_O est donnée par la formule*

$$(38)\qquad (-1)^{n_1}\,.\,\pi\Omega_{2n_1-2}\,.\,u_O = (-1)^{n_1}\frac{\Omega_{2n_1-1}}{C_{n_1-1}}u_O = -\overline{\int\int\cdots\int_T vf\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n} + \\ + \overline{\int\int\cdots\int_S \left(u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu} - Luv\right)dS}.$$

Pour $n = 3\,(n_1 = 1)$, le coefficient de u_O est $-\Omega_1\frac{1}{2C_1} = -2\pi$.

18. D'après ce qui précède, la première intégrale (intégrale n^{uple}) doit avoir un sens du moins si en faisant tendre Σ vers le point O, on s'impose la restriction mentionnée dans la note de la page 355. On peut mettre ce fait en évidence, et même montrer que la restriction imposée à Σ est inutile, en adoptant le système des coordonnées curvilignes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, s$: on aura

$$\overline{\int\int\cdots\int_T vf\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n} = \\ = \overline{\int\int\cdots\int \frac{Vf}{s^{n-2}H^{\frac{n-2}{2}}}\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, s)}d\lambda_1\,d\lambda_2\ldots d\lambda_{n-1}ds}.$$

Or le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, s)}$ contient s^{n-1} en facteur et par conséquent la quantité sous le signe $\int\int\ldots\int$ ne contient plus que l'infini fractionnaire

$$\frac{1}{H^{\frac{n-1}{2}}\left(\dfrac{x_1-a_1}{s}, \dfrac{x_2-a_2}{s}, \ldots, \dfrac{x_n-a_n}{s}\right)}.$$

19. Le signe qui figure au premier membre de la formule (38) appelle quelques remarques.

Bornons nous, pour simplifier, au cas de l'équation sans second membre,

soit $f=0$. Supposons le point O situé au voisinage de S: alors c'est manifestement le terme $u\frac{dv}{d\nu}$, ou, plus spécialement, la partie

$$-\frac{n-2}{2}\frac{uV\frac{d\Gamma}{d\nu}}{\Gamma^{\frac{n}{2}}}=-(n-2)uVs\frac{\sum \pi_i\frac{dx_i}{ds}}{\Gamma^{\frac{n}{2}}}$$

de ce terme, qui donne son signe à la quantité que l'on doit intégrer le long de S. Ce signe est celui de u, car les π_i désignant les paramètres directeurs de la normale à S *intérieure* à T, c'est à dire de celle qui est dirigée du côté où est O, la somme $\sum \pi_i \frac{dx_i}{ds}$ est negative.

Si donc nous avions affaire à une intégrale ordinaire, elle aurait le signe de u sur S (en supposant ce signe constant). Mais ici l'intégrale $n-1^{\text{uple}}$ est modifiée par une intégrale complémentaire $n-2^{\text{uple}}$, nécessairement de signe contraire.

Or le premier membre doit avoir forcément le même signe que les valeurs de u sur S, si nous continuons à supposer le point O voisin de S.

Donc pour les valeurs paires de n_1, c'est à dire *pour* $n=5, 9, 13, \ldots$, *c'est l'intégrale* $n-1^{\text{uple}}$ *qui donne son signe;* mais pour n_1 impair, c'est à dire *pour* $n=3, 7, \ldots$, *c'est, au contraire le terme complémentaire qui l'emporte.*

Prenons le cas particulier où les valeurs données de u et de $\frac{du}{d\nu}$, nulles en général sur S, sont seulement différentes de zéro dans une certaine région R de S, et où le point O est tel que le conoïde issu de ce point comprenne la région R entièrement à son intérieur (sans la toucher). Nous avons alors ce que, dans un travail précédent,[1] j'ai appelé *l'intégrale résiduelle.*

Dans ce cas, le terme complémentaire est nul. Donc *si u est positif, l'intégrale résiduelle est positive pour les équations à $4p+1$ variables, mais négative pour les équations à $4p+3$ variables, telle que l'équation des ondes cylindriques.* Il en est du moins ainsi tant que le point considéré est assez voisin de S et que les valeurs données de $\frac{du}{d\nu}$ ne sont pas trop grandes par rapport à celles de u.

20. Les formules précédentes s'étendent, comme il est bien connu,[2] au cas où la frontière S est formée de portions de caractéristiques, pourvu que, comme

[1] Bulletin de la Soc. Math. de Fr. 1900.

[2] Voir d'ADHÉMAR, C. R. Ac. Sc. 11 février 1901; COULON Thèse p. 53 et suiv.

précédemment elle délimite complètement, avec une nappe de Γ, une portion d'espace T intérieure à cette nappe.

De plus, la conormale à S est, dans ce cas, tangente à S, de sorte que les dérivées conormales sont des dérivées prises sur S elle même.[1] La formule ne fait donc inter venir que les valeurs de u (et non plus de ses dérivées) sur la multiplicité en question. Un solution de l'équation est ainsi déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une frontière formée de caractéristiques.

21. Prenons, pour S, une nappe de conoïde caractéristique Γ_1 de sommet O_1 et disposée de manière à délimiter avec Γ un domaine T; pour u, la solution de l'équation proposée privée de second membre

$$F(u) = 0$$

analogue à v, c'est à dire celle qui est singulière en O_1 et qui est, autour de ce point, de l'ordre de

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_{O_1}}}\,\frac{1}{\Gamma_1^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Si nous intégrons dans T, les termes relatifs aux frontières Γ, Γ_1 disparaîtront encore. Aucune modification ne sera apportée à cette conclusion par la présence de l'intersection de Γ et de Γ_1, grâce à ce qui a été établi au nº 10. Nous aurons donc uniquement, comme dans ce qui précède, à isoler les points O et O_1 et il viendra

$$u_O = v_{O_1}. \tag{39}$$

C'est la *relation d'échange*, tout analogue à celle qui a lieu pour la fonction de Riemann dans l'équation hyperbolique à deux variables,[2] ou à la symétrie de la fonction de Green dans la théorie du potentiel. Elle a lieu, comme on voit, moyennant la précaution que nous avons prise de diviser par $\sqrt{\Delta_O}$ la solution singulière en O.

Grâce à la relation (39) nous voyons que la fonction v, *considérée comme fonction du point* O et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant fixes, est une solution de l'équation proposée supposée privée de second membre.

[1] D'Adhémar, C. R. Ac. Sc. loc. cit.

[2] Voir Darboux, Leçons sur la théorie des surfaces, tome II.

IV. Synthèse de la solution précédente. Problème extérieur.

22. Nous montrerons brièvement que la solution obtenue dans ce qui précède vérifie bien les conditions du problème (du moins moyennant la régularité des données).

Pour l'équation des ondes cylindriques (solution de M. Volterra), cette démonstration a été faite par M. d'Adhémar.[1] Toute fois, M. d'Adhémar n'a élucidé la question qu'en ce qui concerne les conditions aux limites, et a laissé de côté l'équation elle-même, le calcul des dérivées secondes paraissant présenter de grandes difficultés.

La vérification de l'équation aux dérivées partielles est au contraire, particulièrement simple dans notre manière de procéder.

Elle est immédiate pour l'équation sans second membre, c'est à dire quand l'expression (38) de $(-1)^{n_1}\pi\Omega_{2n_1-2}u_O$ se réduit à son second terme. Nous savons, en effet (n° 14) que, pour différentier celui-ci par rapport aux a, il suffit de différentier sous le signe $\overline{\left|\int \ldots \int\right.}$. Or la quantité à intégrer ne contient les a que par le facteur v, lequel est (n° précédent) solution de l'équation sans second membre.

Soit maintenant $f \neq 0$. Nous n'avons plus à nous occuper que de l'intégrale n^{uple}

$$-\overline{\left|\int\int\cdots\int_T v f\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\right.}. \tag{40}$$

Nous lui appliquerons des méthodes toutes semblables à celles de la théorie classique du potentiel.

Pour différentier une première fois cette intégrale par rapport à l'une des coordonnées a, il suffit de différentier sous le signe $\int \ldots \int$. En effet, l'intégrale ainsi obtenue

$$-\overline{\left|\int\cdots\int_T \frac{\partial v}{\partial a_i} f\, dx_1 \ldots dx_n\right.} \tag{41}$$

a un sens, c'est à dire qu'en isolant le point O par une surface voisine Σ (comparer la fig. schématique 4) on a une intégrale qui tend vers une limite déterminée

---

[1] Bull. Soc. Math. Fr. 1901, p. 190 et *Thèse*, Paris, 1904.

quand Σ tend vers le point O suivant une loi quelconque. C'est ce qu'on voit en suivant la même marche qu'au n° 18. Mais de plus, l'intégrale précédente est uniformément convergente, c'est à dire que l'erreur commise en substituant le domaine d'intégration T' (fig. 4) à T a une limite supérieure qu'on peut assigner sans connaître le point O, pourvu qu'on le sache suffisamment voisin de Σ.

Donc, d'après un raisonnement bien connu, l'intégrale (41) est la dérivée de (40), même dans le domaine T.

Pour différentier une seconde fois, on considérera à nouveau la surface Σ, qui décompose le domaine d'intégration en deux parties, l'une T' comprise entre S et Σ, l'autre T'' comprise entre Σ et O.

Dans T', on différentiera directement sous le signe $\int \ldots \int$.

Dans T'', on écrira

$$-\frac{\partial v}{\partial a_i} = -\left(\frac{\partial v}{\partial a_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot$$

La quantité $\left(\frac{\partial v}{\partial a_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ donne lieu à une intégrale qu'on peut différentier sous le signe $\int \ldots \int$ en appliquant les raisonnements du n° 18. Cela tient à ce que les termes du moindre degré de Γ ne contiennent que les combinaisons

$$x_1 - a_1,\ x_2 - a_2,\ \ldots,\ x_n - a_n.$$

Quant à l'intégrale

$$\overline{\int \cdots \int_{T''}} f \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n,$$

on la transformera par la formule de GREEN[1] en

$$-\overline{\int \cdots \int_{T''}} v f_i' dx_1 \ldots dx_n + \overline{\int \cdots \int_{\Sigma}} v f \pi_i dS$$

π_i étant, comme précédemment, un cosinus directeur de la normale à Σ dirigée vers l'intérieur de T' (donc vers l'extérieur de T'').

[1] Cette formule, dont la démonstration repose sur la décomposition de l'intégration multiple en intégrations simples, n'est directement applicable qu'à des domaines tels que T', et en supposant la direction de l'axe des x_i intérieure au cone caractéristique (comparer plus loin, nos 30, 31). Mais on peut choisir les axes coordonnées de manière à vérifier cette dernière condition et, d'autre part, l'intégrale $n-1^{\text{uple}}$ prise sur Σ tendant ici vers zéro, la formule s'étend à des domaines tels que que T, donc à T''.

La différentiation sous les signes $\int \ldots \int$ n'offre plus maintenant de difficulté, et l'on a

$$-\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k}\overline{\left|\int_T \cdots \int v f\, dx_1 \ldots dx_n\right.} = -\overline{\left|\int_{T'} \cdots \int \frac{\partial^2 v}{\partial a_i \partial a_k} f\, dx_1 \ldots dx_n\right.} + \overline{\left|\int_{\Sigma} \cdots \int f \pi_i \frac{\partial v}{\partial a_k} dS\right.} + R$$

(R étant une intégrale n^{uple} prise dans T''); ou, encore, en faisant tendre Σ vers le point O,

$$\frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_k}\overline{\left|\int_T \cdots \int v f\, dx_1 \ldots dx_n\right.} = \lim. \left\{-\overline{\left|\int_{T'} \cdots \int \frac{\partial^2 v}{\partial a_i \partial a_k} f\, dx_1 \ldots dx_n\right.} + \overline{\left|\int_{\Sigma} \cdots \int f \pi_i \frac{\partial v}{\partial a_k} dS\right.}\right\}$$

Le résultat de substitution de l'expression (40) dans le polynôme différentiel F est dès lors

$$\lim \overline{\left|\int_{\Sigma} \cdots \int f \sum_{i,k} a_{ik} \pi_i \frac{\partial v}{\partial a_k} dS\right.}$$

limite tout analogue[1] à celle de la quantité (36) du nº 17, à laquelle on la ramène sans difficulté.

23. Venons enfin aux conditions à la frontière.

Celle qui est relative à la valeur de u sur S doit être considérée comme vérifiée par les calculs des nᵒˢ 16 et 17 (où la surface désignée par Σ n'est autre que S). Rien en effet, dans ce qui a été exposé en cet endroit ne suppose le point O fixe.

La condition relative à la dérivée conormale serait sans doute un peu plus malaisée à vérifier directement. Mais elle est certainement remplie lorsque S et la distribution des données sur cette surface sont analytiques et régulières (puisque les théorèmes généraux nous enseignent *à priori* l'existence d'une solution).

Or on peut évidemment remplacer S par une autre surface S' ayant avec la première un contact d'un certain ordre au point considéré A, et les données par d'autres également tangentes aux premières en ce même point. Il suffit, pour cela, que ces données et les coordonnées de S soient dérivables jusqu'à l'ordre qui suit celui que l'on doit obtenir. Or on verra aisément que, si ce der-

[1] Les deux expressions ne diffèrent que par le changement de $\frac{\partial v}{\partial x_k}$ en $\frac{\partial v}{\partial a_k}$ et par ce fait que les valeurs des a_{ik} sont prises, dans un cas, au point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dans l'autre au point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

nier est suffisamment élevé, on n'altère pas ainsi la valeur de la dérivée conormale en A.[1]

24. Dans le cas où la frontière S est caractéristique, nos formules font connaître la fonction cherchée u à l'aide des valeurs de u seul sur cette frontière (jointes, bien entendu, aux valeurs de f si l'équation est à second membre).

Il reste à montrer que les valeurs ainsi obtenues satisfont bien à la condition aux limites (l'équation aux dérivées partielles s'établissant comme dans le cas de la frontière non caractéristique)

Cette démonstration présenterait des difficultés particulières, si l'on ne voulait adopter aucune hypothèse restrictive sur la forme de S. Cette frontière, qui ne peut pas, ici, être formée d'une seule surface régulière, peut en effet, soit comprendre plusieurs portions de caractéristiques sécantes entre elles, soit présenter des singularités, lesquelles peuvent être de natures très diverses.

Le cas où S est elle-même un cône caractéristique, a été traité dans ces derniers temps par M. d'ADHÉMAR[2] pour l'équation des ondes cylindriques.

Nous considérons l'équation générale correspondant au cas de $n=3$ en supposant, pour fixer les idées, que S est composée de deux caractéristiques régulières sécantes entre elles. Par un changement de variables, nous pourrons faire que ces deux caractéristiques aient pour équations respectives $x=0$, $z=0$, les bicaractéristiques tracées sur chacune d'elles correspondant à $y=\text{const}$. La valeur de $2\pi u_O$, savoir

$$(38') \qquad -\iiint vf\,dx\,dy\,dz + \left|\iint_S \left(u\frac{dv}{dr} - v\frac{du}{dr} - Luv\right) dS\right.$$

pourra, en ce qui concerne l'intégrale de surface, se transformer par parties. Pour cela, on choisira dS de manière à pouvoir prendre sur $z=0$, $v=x$ et sur $x=0$, $v=z$. Soient dans le premier cas,

$$dS = K\,dx\,dy$$

dans le second

$$dS = K'\,dy\,dz$$

les expressions de dS sur $z=0$. Le terme

[1] Le même mode de raisonnement se transporterait quoique, avec un peu plus de complication, au cas où l'équation elle même n'est pas analytique (en supposant démontrée, du moins, l'existence de la solution fondamentale dans ce cas).

[2] Circolo Mat. di Palermo, tome XX, 27 mai 1905.

$$\left|\overline{\iint u\frac{dv}{d\nu}dS}\right. = \left|\overline{\iint K u\frac{\partial v}{\partial x}dx\,dy}\right.$$

pourra s'intégrer par parties par rapport à x. Les deux limites d'intégration, pour une valeur déterminée quelconque de y, sont fournies, l'une par l'axe des y, arête du dièdre (fig. 5), l'autre par le conoïde caractéristique. Mais le terme correspondant à cette dernière limite disparaît comme infini fractionnaire. Il reste donc, pour la portion d'intégrale prise sur $z = 0$,

$$(42)\quad \left|\overline{\iint\left(u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu} - Luv\right)dS}\right. = -\iint v\left(K\frac{\partial u}{\partial x} + KLu + \frac{\partial (Ku)}{\partial x}\right)dx\,dy - \int_{y_1}^{y_2} Kuv\,dy$$

(l'intégrale simple étant prise suivant un segment $P_1 P_2$ (fig. 5) de l'axe des y). Le signe $\left|\overline{}\right.$ n'est plus nécessaire au second membre, la quantité v n'ayant qu'un infini d'ordre $\frac{1}{2}$.

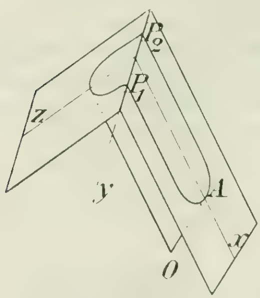


Fig. 5.

Nous supposons le point O très voisin d'un point A (fig. 5) du plan $z = 0$, point par lequel nous ferons passer l'axe des x. Dans ces conditions tout parallèle à l'axe des y menée dans le plan $z = 0$ ou voisine de ce plan coupera le conoïde Γ de sommet A en deux points dont les abscisses y_1, y_2 auront la forme

$$y_1 = \lambda - \sqrt{\mu},\quad y_2 = \lambda + \sqrt{\mu}$$

λ et μ étant des fonctions régulières dans les conditions où nous nous plaçons: on pourra écrire

$$\Gamma = G(\mu - (y - \lambda)^2).$$

G, λ, μ seront des fonctions de a, b, c, x, y, z, dont les deux dernières (mais non la première) tendent vers zéro avec b, c, y, z, quels que soient x et a.

Or l'intégrale

$$\int_{\lambda-\sqrt{\mu}}^{\lambda+\sqrt{\mu}} \frac{dy}{\sqrt{\mu - (y-\lambda)^2}}$$

est, comme on sait, égale à π.

Donc le second membre de la formule (42) est égal (au signe près) à

$$(43) \qquad -\pi\left(\frac{K_0 u_0}{\sqrt{G_0}}+\int_0^x \frac{K\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial (Ku)}{\partial x}+KLu}{\sqrt{G}}\,dx\right),$$

a désignant ici l'abscisse du point A; u_0, K_0, G_0, les valeurs de u, K, G à l'origine des coordonnées.

L'intégrale prise sur $x = 0$ se traite de manière toute semblable (avec cette simplification que l'intégrale double correspondant à celle du second membre de (42) y disparaît, l'aire d'intégration étant infiniment petite) elle se réduit donc, à la limite, à

$$(43') \qquad \pm \pi \frac{K_0 u_0}{\sqrt{G_0}}.$$

Quant à l'intégrale triple de la formule (38′), elle tend évidemment vers zéro.

La somme des quantités (43), (43′) se réduit à $2\pi u_0$ toutes les fois que la distribution des valeurs de u est analytique,[1] puisque, dans ce cas, le problème est assurément possible, d'après les recherches de Beudon.[2] Ceci d'après des théorèmes bien connus de calcul des variations, ne peut avoir lieu sans qu'il en soit de même pour toute distribution des valeurs de u. C'est ce que nous voulions établir.

Le raisonnement peut s'étendre aux cas de $n = 5, 7, \ldots$ sans difficulté essentielle; car les formules du n° 13 permettent de calculer l'intégrale

$$\left|\overline{\int_{\lambda-\sqrt{\mu}}^{\lambda+\sqrt{\mu}} \frac{\varphi(y)\,dy}{\sqrt{\mu-(y-\lambda)^{2p}}}}\right. ;$$

Nous n'insisterons pas plus longuement sur ce point et nous donnerons quelques indications sur l'extension des résultats précédents au problème *extérieur* relatif à l'équation (E).

25. On sait que ce problème extérieur[3] est celui où la surface S n'a plus par rapport aux cônes caractéristiques, la situation supposée dans ce qui pré-

[1] Ce raisonnement paraît supposer que la surface caractéristique S est elle-même analytique. Il n'en est rien. On peut, en effet, substituer à S une caractéristique analytique S' ayant avec elle un contact d'ordre aussi élevé qu'on voudra en un point de l'axe des x, par exemple à l'origine des coordonnées. En vertu des propriétés fondamentales des caractéristiques, ce contact subsistera sur toute la bicaractéristique (ici l'axe des x) et, par conséquent, les coefficients de u et de sa dérivée dans les quantités (43), (43′) seront les mêmes sur S et sur S'.

[2] Bull. Soc. Math. Fr., 1897.

[3] Volterra, Acta Math. t. 18; d'Adhémar, Thèse (Paris, 1904).

cède, c'est à dire où son plan tangent en chaque point coupe le cône caractéristique correspondant. S coupe alors les *deux* nappes du conoïde caractéristique issu d'un point (suffisamment voisin) O: elle est d'ailleurs supposée avoir une forme telle qu'elle délimite, avec ces deux nappes, un espace complètement fermé, et c'est à cet espace, *extérieur* au conoïde, qu'on applique la formule fondamentale.

Le problème extérieur n'est pas un problème *bien posé*, en ce sens que les données y sont surabondantes et, par conséquent, la solution n'existe que moyennant une infinité de conditions de possibilité. Il ne faut pas, dès lors, s'attendre à la voir aussi étroitement liée à notre solution fondamentale que celle du problème intérieur (puisqu'elle est susceptible d'une infinité d'expressions en fonction des données). Néanmoins, même dans ce cas, nos résultats permettront d'obtenir ceux de M. VOLTERRA[1] et de les étendre à l'équation générale (E).

Considérons encore notre solution fondamentale v et appliquons-lui (ainsi qu'à la fonction inconnue u) la formule fondamentale non plus dans notre domaine T, mais dans celui que M. VOLTERRA[2] appelle $\bar{S}_a$.

L'intégrale obtenue sera nulle; elle ne fera plus connaître, par conséquent, la valeur de u_O, mais donnera une relation entre les données, qui sera une *condition de possibilité* du problème. Cela tient à ce que (n° 13 bis) la partie finie du volume de l'hyperboloïde à une nappe est nulle

26. Pour obtenir la véritable solution, nous partirons non de la forme que nous avons donnée ici même à la méthode, mais de celle que nous avions adoptée dans notre Mémoire précédent, et nous prierons le lecteur de se reporter à ce Mémoire.[3]

Nous substituerons seulement à l'intégrale considérée en cet endroit, savoir

$$V_1 = \int_L m(t) v\, dt$$

où $m(t)$ est finie, l'intégrale analogue dans laquelle nous prendrons $m(t) = \log(t - t_0)$ (t_0 étant la limite inférieure de l'intégrale).

Pour

$$v = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 - (x_3 - a_3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - (x_3 - a_3)^2}}$$

(avec $t = a_3$), on a aisément

[1] Mémoire cité des Acta Math. t. XVIII.

[2] VOLTERRA, loc. cit. n° 6.

[3] Ann. Éc. Norm. sup., loc. cit., deuxième Mémoire 1905; p. 104 et suiv.

$$V_1 = c + \int_0^\Theta \log(1-\Theta^2)\frac{d\Theta}{\sqrt{1-\Theta^2}} + \log r \arcsin\frac{x_3-t_0}{r} \tag{44}$$

$\left(\text{avec } \Theta = \frac{x_3-t_0}{r}\right)$ c'est à dire l'intégrale w_3 de M. VOLTERRA.[1] Comme dans le problème intérieur, après avoir porté cette fonction V_1 dans la formule fondamentale, il restera à différentier par rapport à t_0. Il revient d'ailleurs au même de faire d'abord cette différentiation dans l'expression V_1 elle même. On trouve ainsi, si l'on opère sur l'expression (44), la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-(x_3-t_0)^2}}\log\left(\frac{r^2-(x_3-t_0)^2}{r}\right)$$

c'est à dire celle qui figure dans la formule (F') de M. VOLTERRA.[2]

Il est aisé de donner à $\frac{\partial V_1}{\partial t_0}$ une expression tout analogue dans le cas général. On peut, en effet, mettre Γ sous la forme[3]

$$\Gamma = n(x_1, x_2, x_3)[B-(t-A)^2]$$

où A et B sont des fonctions holomorphes de x_1, x_2, x_3. En reportant ceci dans v et développant la fonction $\frac{V}{\sqrt{n}}$ suivant les puissances de $[B-(t-A)^2]$,[4] on voit immédiatement que la partie principale du résultat aura la même forme que dans le cas de l'équation des ondes cylindriques savoir

$$\frac{1}{\sqrt{B-(t-A)^2}}\log\frac{B-(t-A)^2}{\sqrt{B}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\log\frac{\Gamma}{n\sqrt{B}}$$

(puisque V a la valeur 1 au point O). B est d'ailleurs, à un facteur régulier et différent de zéro près, la carré de la distance géodésique du point (x_1, x_2, x_3) à la ligne d'intégration L.

En opérant sur cette quantité comme nous avons opéré précédemment sur v, on aura évidemment, comme coefficient de u_O, aux facteurs numériques près déjà écrits précédemment, l'intégrale

$$\left|\overline{\int_{-1}^{+1}\frac{dz\log(1-z^2)}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}}\right| = 2\left[\frac{d}{d\mu}B\left(\frac{1}{2}, 1-\mu\right)\right]_\mu.$$

(B étant l'intégrale eulérienne de première espèce; comparer n° 31).

[1] loc. cit. p. 170. [2] loc. cit. p. 193.

[3] Les notations sont celles de mon travail cité des Annales de l'Ecole Norm. sup. 1905 n° 19. J'ajoute que le calcul ainsi présenté n'est pas essentiellement distinct de celui que M. POINCARÉ a développé dans son mémoire *Sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions abéliennes* (Acta Math., t. 22; 1899, p. 114 et suiv.).

[4] Ann. Ec. Norm. loc. cit. p. 109.

27. Si, au lieu de prendre le point O intérieur à S, on l'avait supposé extérieur, la solution fondamentale v correspondante aurait été régulière dans toute la portion d'espace comprise à l'intérieur de S et à l'extérieur du conoïde caractéristique de sommet O (cette dernière frontière exclue): dès lors, en appliquant la formule fondamentale à cet espace (v étant la solution fondamentale en question et u la fonction cherchée), on aura une nouvelle condition de possibilité du problème.

Le système de ces conditions de possibilité est équivalent à celles qu'indique M. d'Adhémar [1] et qui consistent à exprimer que la solution calculée comme il est expliqué au nº précédent, vérifie les conditions aux limites sur S. Cette équivalence tient à ce que les intégrales prises sur S présentent (comme l'a remarqué M. Volterra [2] pour l'équation des ondes cylindriques) les mêmes discontinuités que les potentiels de surface, ainsi qu'on l'établit par les méthodes employées au nº 23.

Il est clair que ces conditions sont suffisantes pour la possibilité du problème, de sorte qu'elles contiennent celles que nous avons obtenues au nº 25.

28. Tout ceci s'étendrait sans difficulté aux autres valeurs impaires de n.

On traiterait par des méthodes semblables, les équations non normales dont s'est occupé spécialement M. Coulon, [3] celles dans lesquelles la forme A contient plus d'un carré de chaque signe. Dans ce cas (le nombre total des variables étant toujours supposé impair) entre le cône

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

et les deux surfaces du second degré

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \pm 1 \tag{45}$$

sont compris deux volumes dont on peut calculer les parties finies: il est aisé de voir que l'une d'elles (celle que l'on obtient en donnant au second membre de (45) le signe qui appartient à un nombre pair de carrés du premier membre) est nulle, l'autre différente de zéro. Cette dernière n'est autre (comparer plus loin nº 31) qu'une intégrale eulérienne de première espèce.

Il en résulte que les problèmes de Cauchy (impossibles d'ailleurs en général) que l'on peut se poser relativement à une équation du type de M. Coulon, se résolvent les uns directement à l'aide de la solution fondamentale, les autres par le procédé indiqué au nº 26.

[1] Thèse p. 58 et suiv.

[2] Congrès International des Mathématiciens, Paris 1900.

[3] Coulon, Thèse, Ch. III, IV

V. Les équations à un nombre pair de variables.

29. Les premiers exemples qu'on ait pu donner de la résolution du problème de CAUCHY pour le type hyperbolique ne se rapportent pas à des équations qui rentrent dans la catégorie précédente. Ce sont la méthode de RIEMANN et celle de KIRCHHOFF. L'une est relative au cas de $n=2$, l'autre à celui de $n=4$.

Une singularité disparaît alors comme nous le verrons: c'est l'intervention des intégrales infinies. Ainsi s'explique que les solutions qui viennent d'être rappelées aient été trouvées les premières.

Dans le cas général, au contraire, les valeurs paires de n doivent être considérées comme offrant des difficultés nouvelles.

Les méthodes précédentes cessent de s'appliquer, et cela pour deux raisons:

D'abord la *solution fondamentale* n'est plus bien déterminée (n° 2).

En second lieu, il ne sera plus légitime de parler de la *partie finie* des intégrales que nous serions conduits à employer, puisque l'exposant d'infinitude, c'est à dire l'exposant $\frac{n-2}{2}$ ou $\frac{n}{2}$, avec lequel figure Γ au dénominateur dans la solution fondamentale ou dans ses dérivées, est un entier.

En fait, il ressortira de la nature même des expressions auxquelles nous aboutirons, qu'elles ne pourraient pas être obtenues par une imitation pure et simple des méthodes employées jusqu'ici.

La marche que nous suivrons consistera à déduire la solution d'une équation à n variables

$$\text{(E)} \qquad F(u)=\sum a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}+\sum \mathsf{a}_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+lu=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

de celle d'une équation analogue à $n+1$ variables

$$\text{(E')} \qquad F'(u)=F(u)-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

(où z désigne la $n+1^{\text{ième}}$ variable). Si, comme nous le supposons, la forme

$$A=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\,\varpi_i\,\varpi_k$$

relative à l'équation (E) comprend un carré positif et $n-1$ carrés négatifs, la forme analogue A' relative à l'équation (E') comprendra un carré positif et n carrés négatifs. La quantité Γ' analogue à Γ pour l'équation (E') sera

$$\Gamma' = \Gamma - (z-c)^2,$$

où $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n, c)$ sont deux points de l'espace à $n+1$ dimensions.

Nous allons tout d'abord trouver les relations qui existent entre les solutions fondamentales des deux équations ou plutôt entre celles de leurs adjointes

$$(\mathrm{E}_1) \qquad G(v) = 0,$$

$$(\mathrm{E}'_1) \qquad G'(v) = G(v) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

C'est ce qui a été fait dans le travail cité,[1] pour le cas de $n=2$. Le calcul est tout semblable pour les valeurs supérieures de n, à ceci près que nous aurons encore affaire à des intégrales infinies dont il faudra prendre les parties finies: la solution fondamentale de l'équation (E'_1) sera

$$(46) \qquad v = w + \left| \int_{z+\sqrt{\Gamma}}^{c_1} \frac{V'}{(-\Gamma')^{\frac{n-1}{2}}} dc \right. = w + \left| \int_{z+\sqrt{\Gamma}}^{c_1} \frac{V'}{[(c-z)^2 - \Gamma]^{\frac{n-1}{2}}} dc \right.$$

en désignant par c_1 un nombre fixe (très grand), par

$$v' = \frac{V'}{\Gamma'^{\frac{n-1}{2}}}$$

la solution fondamentale de l'équation (E'_1); par w, une fonction régulière.

V' est, comme on le constate aisément, une fonction paire de $z-c$. En l'ordonnant suivant les puissances de $(z-c)^2 - \Gamma$:

$$V' = \sum_0^\infty (-1)^i W_i [(z-c)^2 - \Gamma]^i,$$

nous aurons la partie singulière de l'expression (46) sous la forme

$$(47) \qquad \sum_0^\infty (-1)^i W_i \left| \int_{z+\sqrt{\Gamma}}^{c_1} [(z-c)^2 - \Gamma]^{i-\frac{n-1}{2}} dc \right. = \sum_0^\infty (-1)^i W_i \left| \int_{\sqrt{\Gamma}}^{c_1 - z} (c'^2 - \Gamma)^{i-\frac{n-1}{2}} dc' \right. .$$

En remplaçant la limite supérieure $c_1 - z$ par c_1, on n'altère le résultat que d'une quantité holomorphe en $x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Les formules (27), (27') donnent, dès lors, pour $n = 2n_1$,

---

[1] Ann. Ec. Norm., 1er Mémoire, nº 19, p. 108—110; 1904.

$$(48)\quad (-1)^{n_1-1} v = \frac{1}{\Gamma^{n_1-1}} \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{2(n_1-i-1)C_{n_1-i-1}} W_i \Gamma^i - \frac{\log \Gamma}{2} \sum_{i=n_1-1}^{\infty} C_{i-n_1+1} W_i \Gamma^{i-n_1+1} + w,$$

w étant encore une fonction régulière.

La quantité v coincīde forcément avec celle que nous avions écrite précédemment: on a

$$(49)\quad V = C_{n_1-1} \sum_{i=0}^{n_1-2} \frac{1}{(n_1-i-1)C_{n_1-i-1}} W_i \Gamma^i + w\Gamma^{n_1-1},$$

$$V_0 = C_{n_1-1} \sum_{i=n_1-1}^{\infty} C_{i-n_1+1} W_i \Gamma^{i-n_1+1}$$

w pouvant être augmenté d'une fonction régulière, solution de l'équation. Les W_i sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

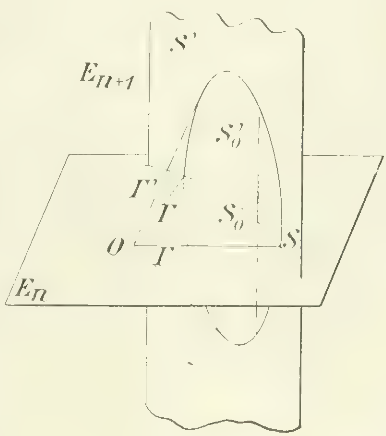


Fig. 6

30. Cela posé, pour obtenir une solution de l'équation (E) répondant, sur la mulplicité S, aux conditions données, nous considérerons, dans l'espace à $n+1$ dimensions défini par les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$, la multiplicité S' (hypercylindre) qui a pour projection S (fig. 6),[1] c'est à dire celle qu'on obtient en prenant successivement pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point quelconque de S et pour z toutes les valeurs réelles possibles. Si S est situé par rapport au conoïde Γ, comme nous l'avons supposé jusqu'ici, il en sera de même de S' par rapport à Γ'. Une solution u de l'équation (E) étant définie par la double condition:

de prendre en chaque point $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ de S' la valeur que doit avoir u au point correspondant $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de S;

d'avoir pour dérivée conormale, au point $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ la valeur donnée de $\frac{du}{d\nu}$ en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

[1] La figure 6, relative au cas de $n=2$, peut servir comme figure schématique pour le cas général.

cette solution sera unique, d'après ce qui précède (pour n pair), indépendante de z et satisfera à l'équation (E). On aura donc ainsi une solution du problème proposé, et réciproquement.

La fonction u sera donnée par la formule (38), soit

$$(50)\quad (-1)^{n_1}\pi\Omega_{n-2}u_O = -\overline{\left|\int\int\cdots\int_{T'} v' f dx_1\, dx_2 \ldots dx_n dz\right.} + \overline{\left|\int\int\cdots\int_{S'_0}\left(u\frac{dv'}{d\nu} - v'\frac{du}{d\nu} - Luv'\right)dS'\right.}$$

où T' désigne la portion d'espace à $n+1$ dimensions comprise entre S' et Γ'. S'_0 (fig. 6) la portion correspondante de S' et $n = 2n_1$.

T' est projeté sur l'espace à n dimensions E_n suivant la région T comprise entre S et Γ, c'est à dire que si le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ appartient à T', le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ appartient à T et qu'inversement, tout point de T est la projection commune de points de T', à savoir, tous ceux dont les z sont compris entre $+\sqrt{\Gamma}$ et $-\sqrt{\Gamma}$ (en supposant nulle la $n+1^{\text{ième}}$ coordonnée de O).

De même S'_0 est projeté sur E_n suivant S_0, chaque point de S_0 étant la projection d'une infinité de points de S'_0, ayant leurs z compris entre $+\sqrt{\Gamma}$ et $-\sqrt{\Gamma}$.

D'après cela, le premier terme du second membre de (50) s'écrira

$$-\overline{\left|\int\cdots\int f dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}} v' dz\right.} = -\overline{\left|\int\cdots\int f dx_1 \ldots dx_n \int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}} \frac{\sum_0^\infty W_i(\Gamma - z^2)^i}{(\Gamma - z^2)^{n_1 - \frac{1}{2}}} dz.\right.}$$

Nous diviserons le domaine d'intégration T en deux parties T_1 et T_2, dont la seconde comprend les points voisins du conoïde caractéristique, par une frontière σ_1 que nous ferons tendre ensuite vers Γ.

A la partie T_1 correspondra, dans T', une portion T'_1 limitée par Γ' d'une part, par un cylindre de base σ_1 de l'autre. L'intégrale relative à T'_1 s'obtiendra en intégrant n fois, dans T_1, l'intégrale simple relative à z

$$\overline{\left|\int_{-\sqrt{\Gamma}}^{+\sqrt{\Gamma}} \frac{\sum_0^\infty W_i(\Gamma - z^2)^i}{(\Gamma - z^2)^{n_1 - \frac{1}{2}}} dz.\right.}$$

Or il résulte des formules obtenues au n° 13 que cette intégrale (où tous les termes d'indice i inférieur à $n_1 - 1$ disparaissent) est égale à π, multiplié par le coefficient du logarithme dans l'intégrale (47), c'est à dire à πV_0.

Déjà, par conséquent, dans ce premier terme, la quantité infinie sur le conoïde, qui figurait sous le signe $\int \ldots \int$ dans les formules relatives au cas de n impair, est remplacée par la quantité parfaitement régulière $\pi V_0 f$.

31. Dans T_2, nous considérerons un système de lignes l, joignant chacune un point de Γ (défini par des coordonnées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$) à un point de σ_1. Un point de T_2 sera donc défini par les valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ et de Γ, cette dernière quantité variant de zéro à une quantité γ très petite si σ_1 est très voisin de Γ.

Soit

$$K d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1} d\Gamma$$

l'élément de T_2.

Si T'_2 est la partie de T' projetée suivant T_2, un point de T'_2 sera défini par les coordonnées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \Gamma, z$.

Intégrons d'abord suivant les lignes l, c'est à dire en laissant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, z$ constants. Puis nous ferons varier z et enfin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. En opérant ainsi, nous aurons deux sortes de termes complémentaires, une intégrale n^{uple} et une intégrale $n - 1^{\text{uple}}$, celle-ci résultant de ce que la partie finie de l'intégrale prise suivant l est très grande quand l est très courte. Nous pouvons d'ailleurs remarquer immédiatement que les termes correspondant à $i > n_1 - 1$, dans le développement de v', ne donnent qu'une intégrale finie au sens ordinaire, et infiniment petite quand σ'_1 tendra vers Γ. Nous en ferons donc abstraction.

Pour $i < n_1 - 1$, soit

$$K f W_i = M_{0i} + M_{1i}(\gamma - \Gamma) + \cdots + M_{ki}(\gamma - \Gamma)^k + \cdots \tag{51}$$

le développement de $K f W_i$ suivant les puissances de $\gamma - \Gamma$, $f W_i$ étant supposé exprimé en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \Gamma$, de sorte que les M_{ki}, qui sont fonctions de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ seulement, représentent à des coefficients numériques et aux signes près, les dérivées successives du premier membre par rapport à Γ, pour $\Gamma = \gamma$.

Un terme quelconque du développement (51) nous donnera, suivant l, l'intégrale simple

$$M_{ki} \left| \int_{z^2}^{\gamma} \frac{(\gamma - \Gamma)^k}{(\Gamma - z^2)^{n_1 - i - \frac{1}{2}}} d\Gamma \right| = M_{ki} (\gamma - z^2)^{i+k-n_1+\frac{3}{2}} \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{t^{n_1 - i - \frac{1}{2}}} dt \right. . \tag{52}$$

L'intégrale qui figure au second membre ne serait autre, si $n_1 - i - \frac{1}{2}$ était inférieur à 1, qu'une intégrale eulérienne de première espèce

$$B(k+1,\ i-n_1+\tfrac{3}{2}) = \frac{\Gamma(i-n_1+\frac{3}{2})\,\Gamma(k+1)}{\Gamma(i-n_1+k+\frac{5}{2})}. \tag{53}$$

On vérifiera sans peine que cette expression reste vraie ici pour notre «partie finie»: il suffira d'exprimer celle-ci par une intégrale suivant un lacet, comme nous l'avons indiqué au nº 6.

Nous devrons, ensuite, intégrer l'expression (52) par rapport à z, de $-\sqrt{\gamma}$ à $+\sqrt{\gamma}$, en prenant la partie finie du résultat. Or la quantité

$$\left\lceil \int_{+\sqrt{\gamma}}^{+\sqrt{\gamma}} (\gamma - z^2)^{i+k-n_1+\frac{3}{2}}\, dz \right. \tag{54}$$

est nulle, nous l'avons vu, pour $i+k-n_1+\frac{3}{2} < -\frac{1}{2}$. Pour $i+k-n_1+\frac{3}{2} > -\frac{1}{2}$, elle est infiniment petite avec γ et, par conséquent, disparaît à la limite. Nous n'avons donc à retenir que les valeurs de i et de k telles que

$$i + k = n_1 - 2. \tag{55}$$

L'intégrale (54) est alors égale à π. Le coefficient (53) devient

$$\frac{\Gamma(i-n_1+\frac{3}{2})\,\Gamma(n_1-i-1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = (-1)^{n_1-1}\pi\,\frac{\Gamma(n_1-i-1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(n_1-i-\frac{1}{2})} = \frac{(-1)^{n_1-i-1}}{(n_1-i-1)\,C_{n_1-i-1}}.$$

Nous avons donc, au total, en réunissant tous les termes ainsi obtenus par intégration relative à Γ et à z et faisant $\gamma = 0$,

$$\pi \sum \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)\,C_{k+1}} M_{ki},$$

où i varie de 0 à $n_1 - 2$, k étant donné par l'égalité (55) et les M_{ki} ayant les valeurs qui correspondent à $\gamma = 0$, de sorte que $(-1)^k M_{ki}$ est le coefficient de Γ^k dans le développement de $K f W_i$ suivant les puissances de Γ (les λ étant toujours considérés comme constants).

Dès lors, la somme précédente est le coefficient de Γ^{n_1-2} dans le développement, suivant ces mêmes puissances, de

$$-\pi K f \sum \frac{W_i \Gamma^i}{(n_1-i-1)\,C_{n_1-i-1}},$$

c'est à dire de $\pi K f \dfrac{V}{C_{n_1-1}}$

Intégrons enfin par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$. Sur la multiplicité σ_1 définie par l'équation $\Gamma = \gamma$, où γ est une constante quelconque, le produit $K d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots\ldots d\lambda_{n-1}$ donne un élément $d\sigma_1$ qui peut être considéré comme défini par l'égalité

(56) $$d\sigma_1\, d\Gamma = dx_1 \,.\, dx_2 \,.\,\ldots\,.\, dx_n \,.$$

L'intégrale

$$I_\gamma = \int\int \cdots \int_{\sigma_1} f V d\sigma_1$$

sera une fonction de γ, que l'on pourra développer suivant les puissances de γ en développant de cette manière le produit Kf et intégrant par rapport aux λ.

Donc la quantité que nous cherchons s'obtiendra en multipliant par $2\pi(-1)^{n_1}$ le coefficient de γ^{n_1-1} dans le développement de I_γ, ou, si on veut, elle est égale à

(57) $$(-1)^{n_1} \frac{2\pi}{(n_1-2)\,!} \left(\frac{d^{n_1-2} I}{d\gamma^{n_1-2}}\right)_{\gamma=0} .$$

Elle contiendra, comme on voit, les dérivées jusqu'à l'ordre $n_1 - 2$ de f et celles de V. Cette dernière fonction n'est déterminée qu'à des termes près contenant en facteur Γ^{n_1-1}; mais on voit que ces termes n'influent pas sur l'expression précédente.

La partie de la valeur u_O qui correspond au terme

$$\int\int \cdots \int v' f dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\, dz$$

se compose donc de l'intégrale n^{uple}

$$\pi \int\int \cdots \int f V_0\, dx_1 \ldots dx_n$$

étendue à l'intérieur de Γ, et de l'expression (57), intégrale $n - 1^{\text{uple}}$ étendue à la surface de Γ. Ces deux quantités ne contiennent, cette fois, aucune fonction infinie, mais seulement les deux fonctions régulières V_0 pour l'une, V pour l'autre.

32. Nous avons, il est vrai, pris l'intégrale I_γ sur toute la partie de la multiplicité $\Gamma = \gamma$ comprise à l'intérieur du domaine T, alors que nous aurions dû exclure d'abord le voisinage immédiat du point O par une surface auxiliaire Σ, puis tous calculs faits (c'est à dire après la dérivation indiquée par la formule (57)) faire tendre la partie ainsi exclue vers zéro.

Mais on s'assure aisément que la partie de I_γ interceptée par Σ a une dérivée $n_1 - 2^{\text{ième}}$, déterminée pour $\gamma = 0$, laquelle tend vers zéro lorsque Σ tend vers ce point O.

33. Une évaluation toute semblable s'applique évidemment à l'intégrale

$$\left|\overline{\int\int\cdots\int\left(v'\frac{du}{dr}+Luv'\right)dS'}\right..$$

On aura, pour cette quantité, la valeur

$$\pi\int\int\cdots\int_{S_0}\left(V_0\frac{du}{dr}+LuV_0\right)dS+2\pi\frac{(-1)^{n_1}}{(n_1-2)!}\frac{d^{n_1-2}}{d\gamma^{n_1-2}_{(\gamma=0)}}\int\cdots\int_{s_\gamma}\left(V\frac{du}{dr}+LuV\right)ds_\gamma$$

où s_γ est l'intersection de S par la multiplicité $\Gamma=\gamma$, et ds_γ, l'élément de s_γ défini par la relation

(58) $$ds_\gamma\, d\Gamma = dS.$$

Passons, enfin, au terme

(59) $$\left|\overline{\int\cdots\int u\frac{dv'}{dr}dS'}\right.=\left|\overline{\int\cdots\int u\frac{dv'}{dr}dS\,dz}\right..$$

Une méthode semblable lui sera encore applicable. Le nombre n_1 devra être changé en n_1+1, puisque $\frac{dv'}{dr}$ contient en dénominateur $(\Gamma-z^2)^{n_1+\frac{1}{2}}$ et non $n_1-\frac{1}{2}$. Dès lors, soit considérée l'intégrale

(60) $$\left|\overline{\int_{\sqrt{\Gamma}}^{z_1}\frac{dv'}{dr}dz}\right.=\frac{U}{\Gamma^{n_1}}+U_0\log\Gamma+\cdots,$$

(les termes remplacés par des points étant réguliers pour $\Gamma=0$): on aura

(61) $$\left|\overline{\int\cdots\int u\frac{dv'}{dr}dS'}\right.=\pi\int\cdots\int_S uU_0\,dS+2\pi\frac{(-1)^{n_1+1}}{(n_1-1)!}\frac{d^{n_1-1}}{d\gamma^{n_1-1}_{(\gamma=0)}}\int\cdots\int_{s_\gamma}Uu\,ds_\gamma.$$

Or l'intégrale (58) n'est autre que

$$\frac{d}{dr}\left|\overline{\int_{\sqrt{\Gamma}}^{z_1}v'dz}\right.=\frac{d}{dr}\left(\frac{V}{\Gamma^{n_1-1}}+V_0\log\Gamma+\cdots\right).$$

On a donc

$$U_0=\frac{dV_0}{dr},\quad U=\Gamma\frac{dV}{dr}-(n_1-1)\frac{V\,d\Gamma}{dr}+V_0\Gamma^{n_1-1}\frac{d\Gamma}{dr}.$$

Ce sont ces valeurs qu'il faudra reporter dans (61).

34. Au premier abord, les expressions ainsi écrites présentent un inconvénient que ne manifestaient pas les précédentes. Elles paraissent dépendre des termes en Γ^{n_1-1} de V, termes qui ne sont pas déterminés.

Il est aisé de vérifier que cette dépendance n'est qu'apparente.

Imaginons, en effet, qu'à partir de chaque point de S', on porte, sur la conormale, une longueur constante très petite ν. Désignons par S'_ν le lieu des points ainsi obtenus et, en chacun d'eux, donnons à u la même valeur qu'au point correspondant de S'.

Le terme (61) sera, dans ces conditions, la dérivée, par rapport à ν, de la quantité

$$\overline{\left|\int \cdots \int_{S'_\nu} u v' dS'\right.}$$

et, par conséquent, sera égal à

$$\pi \frac{d}{d\nu} \int \cdots \int_{S_\nu} V_0 u \, dS + 2\pi \frac{(-1)^{n_1}}{(n_1-2)!} \frac{d}{d\nu} \frac{d^{n_1-2}}{d\gamma^{n_1-2}_{(\gamma=\nu=0)}} \int \cdots \int_{s_{\gamma\nu}} V u \, ds_\gamma$$

où S_ν est la trace de S'_ν sur l'espace E_n; $s_{\gamma\nu}$, l'intersection de S_ν par $\Gamma = \gamma$. (l'élément ds_γ comme, plus haut dS, étant toujours celui qui correspond à $\nu = 0$).

Cette expression est équivalente à la précédente; mais il est visible, cette fois, que les termes en Γ^{n_1-1} de l'expression de V n'y figurent pas.

35. Le calcul du terme

$$\overline{\left|\int \cdots \int u \frac{dv'}{d\nu} dS'\right.}$$

complète la solution du problème. Nous avons l'énoncé suivant:

Soient pour $n = 2n_1$:

V, V_0 *les deux fonctions régulières qui figurent dans la solution fondamentale*

$$v = V_0 \log \Gamma + \frac{V}{\Gamma^{n_1-1}}$$

de l'équation adjointe à la proposée;

Γ, T, S_0, *les domaines analogues à ceux qui ont été définis pour n impair;* σ_1, *la partie de la multiplicité* $\Gamma = \gamma$ (γ *étant une constante positive très petite*) *comprise à l'intérieur de* T; s_γ, *l'intersection de cette même multiplicité avec* S_0, *les éléments des multiplicités* σ_1 *et* s_γ *étant définis par les égalités* (56), (58).

La solution du problème de Cauchy sera donnée par la formule,

$$\pm \frac{\Omega_{n-2}}{2\,C_{n_1-1}} u_O = -\iint \cdots \int_T f\, V_0\, dx_1 \ldots dx_n + \int \cdots \int_{S_0} \left(u \frac{dV_0}{d\nu} - V_0 \frac{du}{d\nu} - L u\, V_0\right) dS$$

$$(62) \qquad \pm 2 \left\{ \frac{1}{(n_1-2)!} \frac{d^{n_1-2}}{d\gamma^{n_1-2}} \left[\iint \cdots \int_{\sigma_1} f\, V\, d\sigma_1 + \int \cdots \int_{s_\gamma} \left(V \frac{du}{d\nu} + L u\, V\right) ds_\gamma \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(n_1-1)!} \frac{d^{n_1-1}}{d\gamma^{n_1-1}} \int \cdots \int_{s_\gamma} u \left[\frac{\Gamma\, dV}{d\nu} - (n_1 - 1) \frac{V\, d\Gamma}{d\nu} + V_0\, \Gamma^{n_1-1} \right] ds_\gamma \right\}_{\gamma=0}$$

Il est inutile d'ajouter que les dérivations sous les signes $\int \ldots \int$ indiquées dans cette formule se font par les règles classiques et ne donnent lieu à aucune des difficultés rencontrées par M. d'Adhémar à propos de la formule de M. Volterra.

36. Pour $n = 2$, $n_1 = 1$, V_0 est la fonction de Riemann. Tous les termes en V disparaissent de la formule précédente, dont le dernier terme se réduit à $V_0 u$. On retrouve alors la formule classique déduite de la méthode de Riemann.

Pour $n = 4$, $n_1 = 2$, un seul terme exigera une dérivation par rapport à γ: ce sera le terme $\frac{d}{d\gamma}\int \cdots \int (n-1)\, u \frac{V\,d\Gamma}{d\nu}\, ds_\gamma$. Tous les autres seront directement exprimés (sans différentiation) en fonction de valeurs de u et de $\frac{du}{d\nu}$ sur S_0 ou s_0, et des valeurs de f dans T ou sur Γ.

Pour l'équation du son, la solution fondamentale est $v = \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 - z^2}}$ (z ayant la signification classique). On a donc $V = 1$, $V_0 = 0$. Il suffit de substituer les expressions dans la formule (62) pour retrouver celle de Kirchhoff.

Pour l'équation des ondes amorties,

$$a^2 \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k u = 0$$

la solution fondamentale se déduit de celle de l'équation du son en multipliant par une fonction de Bessel. On retombe ainsi directement sur les résultats de MM. Birkeland, Carvallo, Brillouin.

37. L'expression de l'inconnue cherchée est, on le voit, notablement différente de celle qui convenait au cas de n impair. Dans cette dernière, c'était la solution fondamentale qui s'introduisait directement. Ici, la solution fondamentale est encore à la base du calcul, mais parce qu'on lui emprunte les deux fonctions V_0 et V qui, seules, interviennent dans les opérations.

D'autre part, la valeur de l'inconnue, pour n pair se présente sous la forme d'une somme de deux intégrales, l'une étendue à l'intérieur du conoïde caractéristique, et dont l'élément contient en facteur les données elles-mêmes multipliées par des fonctions connues; la seconde étendue au conoïde caractéristique lui-même, portant dans les mêmes conditions *sur les données et leurs dérivées jusqu'à l'ordre* $n_1 - 2$ (ou même $n_1 - 1$). Les intégrales ainsi écrites ne portent d'ailleurs que sur des quantités finies, si les données sont régulières.

Dans le cas de n impair, nous avions une intégrale unique, portant sur les données (sans dérivation) mais présentant le caractère paradoxal étudié précédemment et qui, par là même, contient en quelque sorte, virtuellement une intégrale de frontière.

Une telle expression doit, par conséquent, être considérée comme intermédiaire entre deux expressions de la catégorie précédente (les intégrales ordinaires rencontrées pour le cas de n pair) correspondant à deux valeurs consécutives de n_1.

On lui reconnaîtra également ce caractère si l'on se place à un point de vue que j'ai indiqué précédemment dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Paris,[1] et qui est celui du calcul fonctionnel linéaire.

Considérons l'expression

$$\int_0^a \psi(n) g(n)\, dn + A_0 \psi(0) + A_1 \psi'(0) + \cdots + A_{n_1} \psi^{(n_1)}(0) \tag{63}$$

où g est une fonction donnée (finie), ψ une fonction arbitraire; $\psi', \ldots, \psi^{(n_1)}$ les dérivées successives de ψ; $A_0, \ldots$ des nombres donnés.

Si nous prenons

$$\psi = \mu f[\mu(x - x_0)] \tag{64}$$

f ayant les propriétés indiquées dans la Note citée, et μ croissant indéfiniment, l'expression (63) tendra vers une limite déterminée[2] pour $0 < x_0 < a$. Il en sera de même pour $x_0 = 0$ si la formule (63) se réduit à son premier terme. Dans le cas contraire, cette expression augmentera en général, indéfiniment comme μ^{n_1+1}.

Traitons de même l'intégrale

$$\overline{\left| \int_0^a \frac{\psi(x)}{x^{n_1+\alpha}}\, dx \right.} .$$

[1] tome 136, p. 351; 9 février 1903.

[2] Voir la Note citée.

Par la substitution (64), pour $x_0 = 0$, on obtient (comparer n° 12) une quantité sensiblement proportionnelle à μ^{n_1+a}.

Il est clair que le cas de nos intégrales multiples est tout semblable.

38. Enfin les formules précédentes nous fournissent une réponse à la question suivante:

Pour quelles équations linéaires le principe de Huyghens est-il vrai?

ce principe de Huyghens étant pris au point de vue où je m'étais placé précédemment, je veux dire signifiant que *l'intégrale résiduelle est nulle;* autrement dit, que la solution s'exprime par une intégrale étendue au cône caractéristique lui même, et non à l'intérieur de ce cône.

D'après ce qui précède, *la condition nécessaire et suffisante pour cela est évidemment* $V_0 = 0$. Les équations qui admettent le principe de Huyghens sont donc celles dont la solution fondamentale manque de terme logarithmique. L'absence de ce terme exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les ondes régies par ces équations ne *diffusent* pas.

SUR UNE EXTENSION D'UN PRINCIPE CLASSIQUE DE L'ANALYSE
ET
SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS MONOGÈNES DANS LE VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER.

PAR

E. PHRAGMÉN ET ERNST LINDELÖF
à STOCKHOLM à HELSINGFORS.

Les résultats que l'un de nous a fait connaître dans ce journal[1] sont susceptibles d'être notablement étendus et précisés, en même temps qu'on peut les rattacher aux principes élémentaires de l'Analyse. On arrive ainsi à certains théorèmes nouveaux d'un caractère assez général, qui semblent appelés à jouer un rôle dans l'étude des fonctions monogènes dans le voisinage de leurs points singuliers.

I. Principe général.

1. On connaît le rôle que joue dans l'Analyse le principe suivant:

Soient dans le plan de la variable complexe x un domaine connexe, T, et une fonction monogène, $f(x)$, régulière à l'intérieur de ce domaine. Supposons que le module $|f(x)|$ est uniforme dans le domaine T et vérifie pour tout point ξ de son contour cette condition:

(A) *Quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε, l'inégalité*

$$|f(x)| < C + \varepsilon,$$

où C désigne une constante, est vérifiée dès que x, restant à l'intérieur de T, est suffisamment rapproché du point ξ.

Dans ces conditions on aura, pour tout point pris dans l'intérieur de T,

$$|f(x)| \leq C, \tag{1}$$

l'égalité étant d'ailleurs exclue si la fonction ne se réduit pas à une constante.

[1] E. PHRAGMÉN, *Sur une extension d'un théorème classique de la théorie des fonctions,* Acta mathematica t. 28, p. 351—368.

Voici maintenant la généralisation de ce principe que nous avons annoncée, et dont nous développerons quelques conséquences dans la suite de ce travail:

Principe général. *Admettons que le module de la fonction monogène $f(x)$, qui est supposée régulière à l'intérieur du domaine T, soit uniforme dans ce domaine et vérifie la condition* (A) *sur son contour, en exceptant les points d'un certain ensemble E.*

Admettons d'autre part qu'il existe une fonction monogène. $\omega(x)$, régulière et différente de zéro dans T et jouissant en outre des propriétés suivantes:

(a) *A l'intérieur de T le module $|\omega(x)|$ est uniforme et vérifie la condition*

$$|\omega(x)| \leqq 1.$$

(b) *En désignant par σ, ε des nombres positifs aussi petits qu'on voudra et par ξ un point quelconque de l'ensemble E, on aura*

$$|\omega^\sigma(x) f(x)| < C + \varepsilon,$$

dès que x, restant à l'intérieur de T, sera suffisamment rapproché du point ξ.

Dans ces conditions, la conclusion (1) *reste valable pour tout point x intérieur au domaine T.*

Considérons en effet la fonction

$$F(x) = \omega^\sigma(x) f(x).$$

Elle est d'abord régulière et son module uniforme dans le domaine T. En vertu de l'hypothèse (a) on a, d'autre part, $|F(x)| \leqq |f(x)|$ dans le même domaine, d'où il résulte que $F(x)$ vérifie la condition (A) pour les points de son contour qui ne figurent pas dans l'ensemble E. Mais, en vertu de l'hypothèse (b), la condition (A) a lieu aussi pour les points de cet ensemble, et le principe rappelé ci-dessus nous apprend donc que $|F(x)| \leqq C$, ou bien

$$|f(x)| \leqq C\, |\omega(x)|^{-\sigma},$$

pour tout point à l'intérieur de T. Comme cette conclusion subsiste quelque petit qu'on ait choisi le nombre σ, nous arrivons bien au résultat voulu.

2. Il est possible de présenter les hypothèses admises ci-dessus sous une forme plus générale, qui nous sera utile dans la suite. Nous allons en effet démontrer cette proposition:

Les autres conditions restant les mêmes qu'au n° 1, admettons qu'on puisse diviser l'ensemble E en un nombre dénombrable d'ensembles partiels

$$E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_\nu,\ \ldots$$

de telle manière que, à chaque ensemble E_ν, corresponde une fonction monogène $\omega_\nu(x)$, régulière et différente de zéro dans T et jouissant en outre des propriétés suivantes:

(a)' *A l'intériur de T le module $|\omega_\nu(x)|$ est uniforme et vérifie la condition*

$$|\omega_\nu(x)| \leq 1.$$

(b)' *σ, ε désignant des nombres positifs aussi petits qu'on voudra et ξ_ν un point quelconque de l'ensemble E_ν, l'inégalité*

$$|\omega_\nu^\sigma(x) f(x)| < C + \varepsilon$$

est vérifiée dès que x, restant à l'intérieur de T, est suffisamment rapproché de ξ_ν.

Si ces conditions sont remplies, il existe une fonction $\omega(x)$ jouissant des propriétés énoncées au n° 1, en sorte que l'inégalité (1) *aura lieu à l'intérieur du domaine T.*

Pour la démonstration, prenons d'abord une suite de nombres positifs décroissants $\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ldots, \ \varepsilon_\nu, \ldots$ dont la somme est finie, puis une suite de domaines $T_1, \ T_2, \ldots, \ T_\nu, \ldots,$ tous compris dans T et tels que tout point donné à l'intérieur de T appartienne à T_ν dès que ν est suffisamment grand.

Comme $\omega_\nu(x)$ ne s'annule pas dans T, on pourra choisir le nombre positif σ_ν de telle sorte qu'on ait

$$1 \leq |\omega_\nu^{\sigma_\nu}(x)| \leq 1 + \varepsilon_\nu$$

tant que x reste dans le domaine T_ν. Les exposants σ_ν étant ainsi fixés, formons le produit

$$|\omega(x)| = |\omega_1^{\sigma_1}(x)| \, . \, |\omega_2^{\sigma_2}(x)| \ldots |\omega_\nu^{\sigma_\nu}(x)| \ldots$$

En vertu de l'inégalité ci-dessus, ce produit converge uniformément dans toute aire comprise dans le domaine T et n'ayant aucun point commun avec son contour, et représente par conséquent dans ce domaine le module d'une fonction monogène, régulière et différente de zéro.

On voit de suite que cette fonction $\omega(x)$ vérifie la condition (a) du n° 1. D'autre part on a, pour chaque indice ν,

$$|\omega(x)| \leq |\omega_\nu^{\sigma_\nu}(x)|,$$

d'où

$$|\omega^\sigma(x) f(x)| \leq |\omega_\nu^{\sigma\sigma_\nu}(x) \, . \, f(x)|,$$

et, en tenant compte de l'hypothèse (b)' ci-dessus, on en conclut que la fonction $\omega(x)$ vérifie aussi la condition (b) pour les points faisant partie de l'un quelconque des ensembles E_ν, c'est à dire pour tout point de l'ensemble E.

Donc la fonction $\omega(x)$ jouit de toutes les propriétés énoncées au n° 1, ce que nous voulions établir.

II. Quelques applications du principe général.

3. Comme première application du principe établi ci-dessus nous démontrerons la proposition suivante:

Soient un domaine connexe T et une fonction monogène $f(x)$ régulière à l'intérieur de ce domaine. On suppose

1° *que la condition* (A) *du n° 1 est vérifiée pour les points situés sur le contour de T, en exceptant les points faisant partie d'un certain ensemble dénombrable E;*

2° *que, x_ν étant un point quelconque de E et ε un nombre positif aussi petit qu'on voudra, le produit*

$$(x-x_\nu)^\varepsilon f(x)$$

tend uniformément vers zéro lorsque x tend vers x_ν en restant à l'intérieur de T.

Cela étant, on aura

$$|f(x)| \leq C \qquad (1)$$

dans tout le domaine T.

Posons en effet

$$\omega_\nu(x) = \frac{x-x_\nu}{x-a},$$

a étant un point quelconque situé en dehors du domaine T[1]. Cette expression représente une fonction monogène, régulière et différente de zéro à l'intérieur du domaine T, et, comme elle prend une valeur finie pour $x=\infty$, son module reste dans tout ce domaine inférieur à une certaine quantité positive M_ν. En ayant égard à la condition 2° ci-dessus, on voit donc que la fonction

$$\omega_\nu(x) = \frac{\bar\omega\,(x)}{M_\nu}$$

jouit bien des propriétés (a)′ et (b)′ du n° 2, d'où résulte notre proposition.

4. Voici une autre conséquence de notre principe, dont nous indiquerons dans la suite différentes généralisations:

---

[1] Si le point x_ν est à l'infini, on posera $\bar\omega_\nu(x) = \frac{1}{x-a}$. Si le domaine T avec ces points limites embrasse tout le plan, on choisira pour a un point régulier de $f(x)$ situé à l'intérieur de T, et on exclura provisoirement du domaine T un petit voisinage du point a. Notre démonstration sera alors applicable au domaine ainsi formé et, en désignant par C' la plus grande valeur de $|f(x)|$ dans le dit voisinage de a et par C'' la plus grande des deux constantes C et C', on pourra en conclure que $|f(x)| \leq C''$ dans tout le domaine T. Or on a nécessairement $C''=C$, car si on avait $C''>C$, c'est qu'on aurait $C'>C$, $C''=C'$. Dans ce cas $|f(x)|$ prendrait sa valeur maxima C' en un point situé à l'intérieur de T et on devrait avoir $|f(x)|=C'$ dans tout ce domaine, ce qui est en contradiction avec la condition 1°.

Soit une fonction monogène $f(x)$ de la variable complexe $x = re^{i\varphi}$ qui, dans l'angle T défini par les inégalités

(2) $$-\frac{\pi}{2\alpha} < \varphi < \frac{\pi}{2\alpha},$$

est régulière et jouit des propriétés suivantes:

1° *la condition* (A) *du n° 1 est remplie pour tout point du contour de T situé à une distance finie de l'origine;*

2° *il existe un nombre positif $k < \alpha$ tel que le produit*

$$e^{-r^k} f(x)$$

tende uniformément vers zéro à l'intérieur de T lorsque r croît indéfiniment.

Dans ces conditions, l'inégalité (1) *est verifiée à l'intérieur du domaine T.*

La démonstration est immédiate. Posons en effet

$$\omega(x) = e^{-x^{k'}} \qquad (k < k' < \alpha),$$

fonction qui est évidemment régulière et différente de zéro dans T. Son module s'écrit

$$|\omega(x)| = e^{-r^{k'} \cos k'\varphi},$$

et l'on aura donc à l'intérieur de T

$$|\omega(x)| < e^{-\beta r^{k'}},$$

en désignant par β la quantité positive $\cos\left(\frac{k'}{\alpha}\frac{\pi}{2}\right)$. Il en résulte que $|\omega(x)| < 1$ dans le domaine en question et, d'autre part, que le produit

$$\omega^\sigma(x) f(x),$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif σ, tend uniformément vers zéro lorsque x, restant à l'intérieur de T, tend vers le point à l'infini (qui est dans ce cas l'unique point de l'ensemble E). La fonction $\omega(x)$ vérifie donc les conditions énoncées au n° 1 et, par suite, notre proposition est démontrée.

Signalons, en passant, la conclusion suivante, qu'on déduit immédiatement de cette proposition en tenant compte de la remarque faite au début du n° 5.

Si l'on sait que l'ordre d'une fonction entière donnée n'est pas supérieur à un nombre fini ϱ et que son module reste au-dessous d'une limite finie sur certains rayons, disposés de telle manière que l'angle compris entre deux rayons consécutifs quelconques soit inférieur à $\frac{\pi}{\varrho}$, on peut affirmer que la fonction se réduit à une constante.

5. La démonstration donnée au n° 4 reste valable dans le cas où T est un domaine connexe quelconque faisant partie de l'angle (2). D'une manière générale, il est permis de choisir pour T tout domaine qui pourra être enfermé

dans un angle d'ouverture $\frac{\pi}{\alpha}$, quelle que soit son orientation. En effet, en effectuant un déplacement convenable, représenté analytiquement par une certaine transformation linéaire $x' = ax + b$, on pourra toujours ramener cet angle dans la position (2), et la fonction donnée se trouve alors transformée en une fonction de x' à laquelle s'applique notre raisonnement.[1]

Mais voici une remarque plus intéressante. Nous montrerons en effet que, dans la proposition du n° 4, il est permis de substituer à la condition 2° la suivante qui est plus générale:

Quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε, le produit

$$e^{-\varepsilon r^{\alpha}} f(x)$$

tend uniformément vers zéro dans le domaine (2) *lorsque r croît indéfiniment.*

A cet effet, considérons l'expression

$$F(x) = e^{-\eta x^{\alpha}} f(x),$$

η étant un nombre positif arbitrairement petit mais fixe.

Comme $|e^{-\eta x^{\alpha}}| < 1$ dans l'angle (2), on voit d'abord que $F(x)$ vérifie la condition (A) aux points x faisant partie du contour de cet angle et situés à une distance finie de l'origine.

D'après la condition admise ci-dessus nous savons, d'autre part, que $F(x)$ tend vers zéro lorsque le point x s'éloigne indéfiniment suivant un rayon quelconque compris dans l'angle (2) et, en particulier, suivant l'axe réel positif. Le module $|F(x)|$ aura donc une limite supérieure finie C' sur cet axe.

Soit C'' la plus grande des quantités C et C', et désignons par T_1 et T_2 les moitiés de l'angle (2) situées respectivement au-dessus et au-dessous de l'axe réel.

Sur les contours des domaines T_1 et T_2, la fonction $F(x)$ vérifie, à distance finie, la condition (A) où l'on aura substitué C'' à C, et dans chacun de ces domaines le produit $e^{-r^{\alpha}} F(x)$ tend uniformément vers zéro en même temps que $\frac{1}{r}$, d'après l'hypothèse admise ci-dessus. Comme T_1 et T_2 occupent chacun un angle d'ouverture $\frac{\pi}{2\alpha}$, il résulte dès lors de la proposition du n° 4 que

$$|F(x)| \leq C'' \tag{3}$$

dans chacun de ces domaines et, par suite, dans tout le domaine (2).

[1] Le rapport $\left|\frac{x'}{x}\right|$ tendant vers l'unité lorsque le point x s'éloigne indéfiniment, on constate immédiatement que la fonction transformée vérifie une condition de même forme que la condition 2° du n° 4.

Mais on aura nécessairement $C' \leq C$ et, par suite, $C'' = C$.

En effet, si l'on avait $C' > C$, d'où $C'' = C'$, le module $|F(x)|$ prendrait la valeur C' en un point de l'axe réel situé *à l'intérieur* du domaine (2). Comme, d'après (3), $|F(x)|$ ne dépasse la valeur C' en aucun point de ce domaine, on y devrait donc avoir identiquement $|F(x)| = C'$, ce qui est en contradiction avec la condition 1° du n° 4.

Il est donc démontré que $|F(x)| \leq C$,[1] ou bien

$$|f(x)| \leq C\,|e^{\eta x^{\alpha}}|$$

à l'intérieur de (2), et comme cette conclusion subsiste quelque petit que soit η, il en résulte bien qu'on a dans tout ce domaine $|f(x)| \leq C$, c. q. f. d.

La démonstration subit de légères modifications dans le cas où T est un domaine de forme quelconque faisant partie de l'angle (2). Il peut alors arriver que ce domaine soit divisé par l'axe réel en plusieurs portions séparées, dont quelques-unes sont finies tandis que d'autres s'étendent à l'infini. Pour les premières l'inégalité (3) découle immédiatement du principe classique rappelé au début, pour les autres elle se démontre comme ci-dessus.

La remarque faite au début de ce numéro permet d'étendre le résultat qui précède à tout domaine qui pourra être enfermé dans un angle d'ouverture $\frac{\pi}{\alpha}$, et nous avons ainsi établi ce théorème:

Soit dans le plan de la variable complexe $x = re^{i\varphi}$ *un domaine connexe quelconque* T *qu'on puisse entourer d'un angle d'ouverture* $\frac{\pi}{\alpha}$, *et soit, d'autre part,* $f(x)$ *une fonction monogène qui, à l'intérieur de ce domaine, est régulière et jouit des propriétés suivantes:*

1° *Le module* $|f(x)|$ *est uniforme dans* T, *et la condition* (A) *est vérifiée pour tout point à distance finie situé sur le contour de* T.

2° *Quelque petit qu'on se donne le nombre positif* ε, *le produit*

$$e^{-\varepsilon r^{\alpha}} f(x)$$

tend uniformément vers zéro à l'intérieur de T *lorsque* r *croît indéfiniment.*

Dans ces conditions on aura

$$|f(x)| \leq C$$

pour tout point intérieur au domaine T.

[1] L'inégalite (3) une fois établie, cette conclusion pourrait se déduire aussi de la proposition démontrée au n° 4 ou de celle du n° 3.

6. En effectuant un changement de variable, on peut modifier de différentes manières ce théorème.

Faisons d'abord $x' = \log x$; au domaine (2) correspondra, dans le plan de la variable x', une bande comprise entre deux droites parallèles dont la distance est $\frac{\pi}{\alpha}$, et l'on en conclut facilement ce résultat:

Soient un domaine connexe, T, faisant partie d'une bande de largeur $\frac{\pi}{\alpha}$, et une fonction monogène, $f(x)$, régulière à l'intérieur de ce domaine, dont le module est uniforme dans T et vérifie la condition (A) *sur son contour* (*à distance finie*). *On suppose d'ailleurs que le produit*

$$e^{-\varepsilon e^{\alpha r}} f(x),$$

quelque petit que soit le nombre positif ε, tend uniformément vers zéro dans le domaine en question lorsque r croît indéfiniment.

Cela étant, on aura $|f(x)| \leq C$ pour tout point intérieur à T.

En posant

$$x' = Cx^{\beta+i}$$

C et β étant des constantes positives, transformation qui fait correspondre au domaine (2) la portion du plan des x' comprise entre deux spirales logarithmiques, on établit de même cet autre résultat:

Supposons que la fonction monogène $f(x)$ est régulière et son module uniforme dans un domaine connexe T compris entre les spirales logarithmiques

$$r = e^{(\varphi-\varphi_0)\cot\omega} \quad \text{et} \quad r = e^{\left(\varphi-\varphi_0-\frac{\pi}{\alpha}\right)\cot\omega},$$

qu'elle vérifie la condition (A) *sur le contour de T* (*à distance finie*) *et que, à l'intérieur de ce domaine, le produit*

$$e^{-\varepsilon r^{\frac{\alpha}{\cos^2\omega}}} f(x)$$

tend uniformément vers zéro lorsque r augmente indéfiniment, quelque petit que soit le nombre positif ε.

Dans ces conditions, on aura $|f(x)| \leq C$ pour tout point intérieur au domaine T.

7. Nous indiquerons encore en quelques mots une autre généralisation de la proposition établie au nº 4.

Considérons une suite de courbes, $S_1, S_2, \ldots, S_\nu, \ldots$, reliant les deux côtés de l'angle (2) et dont les distances de l'origine augmentent indéfiniment, et désignons par M_ν la plus grande valeur que prend le module de l'expression $e^{-r^k} f(x)$ sur la courbe S_ν. Nous admettrons qu'*il est possible de choisir les courbes S_ν de telle manière qu'on ait*

$$\lim_{\nu=\infty} M_\nu = 0.$$

Nous allons voir que la proposition dont il s'agit ne cesse pas d'avoir lieu si, à la condition 2°, on substitue cette dernière condition, qui est évidemment plus générale.

En effet, il résulte de cette condition que, le nombre positif σ étant donné aussi petit qu'on voudra, le module maximum $\overline{M}_\nu$ du produit

$$e^{-\sigma x^{k'}} f(x) \qquad (k < k' < \alpha)$$

sur la courbe S_ν tend vers zéro lorsque ν augmente indéfiniment. Si l'on se donne arbitrairement un point x compris dans le domaine (2), on pourra donc choisir ν de telle sorte que ce point soit intérieur à la courbe S_ν et que l'on ait en même temps $\overline{M}_\nu < C$. D'après le principe rappelé au n° 1, le module du produit ci-dessus est donc inférieur à C au point considéré, et, comme ce résultat subsiste quelque petit que soit σ, on aura bien $|f(x)| \leq C$.

En tenant compte de la remarque faite au début du n° 5, on arrive ains ià ce résultat:

Soit une fonction monogène, $f(x)$, régulière dans un domaine T tel qu'il est dit dans le théorème du n° 5, et admettons que son module soit uniforme dans T et vérifie la condition (A) *sur son contour, en exceptant le point à l'infini.*

Dans ces conditions, deux cas peuvent se présenter:

Ou bien on aura $|f(x)| \leq C$ pour tout point pris dans l'intérieur du domaine T.

Ou bien, en désignant par $M(r)$ le maximum de $|f(x)|$ sur la portion du cercle $|x| = r$ intérieure à T, l'inégalité

$$M(r) > e^{r^{\alpha - \varepsilon}}$$

sera vérifiée dès que r dépassera une certaine limite, le nombre positif ε étant donné aussi petit qu'on voudra.

A cette dernière inégalité on pourrait d'ailleurs substituer la suivante qui est plus précise:

$$M(r) > e^{V(r)}$$

où V désigne une expression de la forme[1]

$$V(r) = \frac{r^\alpha}{\log r \,.\, \log^{(2)} r \,.\,.\,.\, \log^{(\nu-1)} r \,.\, (\log^{(\nu)} r)^{1+\sigma}},$$

σ étant une quantité positive et ν un entier positif quelconque.

[1] Pour abréger, nous écrivons

$$\log(\log x) = \log^{(2)} x,\ \log[\log^{(2)} x] = \log^{(3)} x, \ldots$$

Il semble même probable qu'il existe toujours, dans cette seconde hypothèse, une constante positive η telle qu'on ait

$$M(r) > e^{\eta r^\alpha}$$

pour r suffisamment grand. Mais il paraît difficile d'en trouver une démonstration.

8. Les résultats des n°s 4 et 5 nous permettent de préciser comme il suit le théorème établi au n° 3:

Admettons que, d'un point donné x_ν de l'ensemble E, on puisse tracer deux arcs de cercles n'ayant aucun point à l'intérieur du domaine T, et soit A_ν l'angle compris entre ces arcs (du côté du domaine T).

Dans ces conditions il est permis de remplacer la condition 2° du n° 3, en tant qu'il s'agit du point x_ν considéré ici, par l'une ou l'autre des conditions suivantes:

Si $A_\nu = \frac{\pi}{\alpha}\,(> 0)$, on suppose que le produit

$$e^{-\frac{\varepsilon}{|x-x_\nu|^\alpha}} f(x),$$

quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε, tend uniformément vers zéro lorsque x tend vers x_ν en restant à l'intérieur de T.

Si $A_\nu = 0$, il suffit d'admettre que la même condition soit remplie pour le produit

$$e^{-\varepsilon e^{\frac{\alpha}{|x-x_\nu|}}} f(x),$$

le nombre α étant cette fois égal à 2π divisé par la valeur numérique de la différence entre les courbures des arcs envisagés.

Il résulte d'abord du théorème établi au n° 2 que le résultat du n° 4 reste encore vrai dans le cas où la condition (A) cesse d'être remplie pour un nombre dénombrable de points situés sur le contour de T, pourvu que la condition 2° du n° 3 soit vérifiée en ces mêmes points.

On constate ensuite que le résultat établi au n° 5 comporte une généralisation analogue.

Or il est évident que, dans l'une et l'autre des hypothèses envisagées ci-dessus, les points de l'ensemble E, compris dans un certain entourage c_ν du point x_ν, sont tels que la fonction $f(x)$ reste finie dans leur voisinage et que, par suite, la condition 2° du n° 3 s'applique à chacun de ces points. D'autre part, on voit facilement qu'il existe un changement de variable, $x = \varphi(x')$, réalisant la représentation conforme d'un certain voisinage t_ν du point x_ν, pris dans l'intérieur de c_ν, sur une aire T_ν faisant partie de l'angle (2), et que la fonction $f(x')$ qui résulte de $f(x)$ par ce changement est telle que le produit

$$e^{-\varepsilon|x'|^{\alpha}} f(x')$$

tend uniformément vers zéro lorsque x' tend vers l'infini en restant à l'intérieur de T_ν, et cela quelque petit que soit ε. A l'aide du théorème du nº 5, généralisé comme il a été dit, on peut en conclure que $|f(x')|$ reste au-dessous d'une limite finie dans T_ν. Il en est donc de même de $|f(x)|$ dans l'aire t_ν, et, par suite, la fonction $f(x)$ vérifie la condition 2º du nº 3 aussi au point x_ν.

Les hypothèses admises ci-dessus se ramènent donc à celles du nº 3.

III. Quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier.

9. Les propositions que nous venons de démontrer conduisent à certains résultats nouveaux relatifs aux propriétés asymptotiques d'une fonction monogène dans le voisinage d'un point singulier isolé. Pour simplifier le langage, nous admettrons que le point singulier qu'il s'agit d'étudier ait été rejété à l'infini à l'aide d'un changement de variable. D'ailleurs, nous nous occuperons uniquement des singularités *d'ordre fini*, mais des résultats que nous allons établir on pourrait tirer aussi certaines conséquences relatives à d'autres points singuliers, en s'appuyant sur des considérations du genre de celles exposées au nº 6.

Soit donc une fonction monogène $f(x)$ de la variable complexe $x = re^{i\varphi}$ qui vérifie les conditions suivantes:

1º *Elle est régulière dans l'angle*

$$a < \varphi < b \tag{4}$$

dès que r est supérieur à une certaine limite.

2º *A l'intérieur de cet angle, $f(x)$ est d'un ordre fini ϱ, en sorte que, quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε, l'égalité*

$$\limsup_{r=\infty} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r^{\varrho+\varepsilon}} = 0$$

a lieu uniformément pour les valeurs φ comprises dans l'intervalle (4), *tandis que cette condition n'est remplie pour aucune valeur négative de ε*[1].

[1] En d'autres termes, pour toute valeur positive de ε, l'inégalité

$$|f(x)| < e^{r^{\varrho+\varepsilon}}$$

a lieu dans l'angle (4) dès que r est supérieur à une certaine limite, et l'inégalité

$$|f(x)| > e^{r^{\varrho+\varepsilon}}$$

du moins pour une infinité de points x tendant vers l'infini et intérieurs à ce même angle, tandis que l'une au moins de ces conditions cessera d'être remplie lorsque ε est négatif.

Soit $V(x)$ une autre fonction monogène jouissant des propriétés suivantes:

1° *Elle est régulière dans l'angle*

$$(5) \qquad -\omega < \varphi < \omega$$

dès que r est supérieur à une certaine limite, ω désignant la plus petite des quantités $\frac{\pi}{2\varrho}$ *et* $\frac{b-a}{2}$.

2° *Elle prend des valeurs réelles et positives pour les valeurs réelles et positives de x qui dépassent une limite donnée.*

3° *Lorsque r augmente indéfiniment, le rapport*

$$\frac{V(r)}{r^{\varrho+\varepsilon}}$$

tend régulièrement vers zéro, tandis que le rapport

$$\frac{V(r)}{r^{\varrho-\varepsilon}}$$

admet l'infini pour limite supérieure, le nombre ε étant donné aussi petit que l'on veut.

4° *r tendant vers l'infini, l'expression*

$$\frac{V(re^{i\varphi})}{V(r)}$$

tend uniformément vers $e^{\varrho\varphi i}$ pour les valeurs φ comprises dans l'intervalle (5).

Telle est, par exemple, toute fonction de la forme

$$(6) \qquad x^{\varrho}(\log x)^{\alpha_1}(\log\log x)^{\alpha_2}(\log\log\log x)^{\alpha_3}\ldots$$

Cela posé, nous allons étudier la fonction réelle $h(\varphi)$ de la variable réelle φ définie par l'égalité asymptotique[1]

$$(7) \qquad h(\varphi) = \limsup_{r=\infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{V(r)}.$$

Cette fonction est définie dans l'intervalle (4), mais parmi ses valeurs possibles figurent aussi les valeurs $+\infty$ et $-\infty$.

[1] Si $h(\varphi)$ prend une valeur finie pour une valeur donnée de φ, on aura, d'après cette définition, quelque petit que soit le nombre positif ε,

$$|f(re^{i\varphi})| < e^{[h(\varphi)+\varepsilon]\,V(r)}$$

dès que r dépassera une certaine limite, et d'autre part l'inégalité

$$|f(re^{i\varphi})| > e^{[h(\varphi)-\varepsilon]\,V(r)}$$

subsistera du moins pour une infinité de valeurs r tendant vers l'infini.

Nous ferons l'étude complète de la fonction $h(\varphi)$ dans le cas où ϱ est positif, et nous ajouterons ensuite, au nº 18, quelques mots relatifs au cas $\varrho = 0$.

Lorsque $\varrho > 0$, la propriété caractéristique de la fonction $h(\varphi)$ se démontre de la manière la plus facile en la comparant à une fonction auxiliaire de la forme[1]

$$H(\varphi) = A\cos\varrho\varphi + B\sin\varrho\varphi, \tag{8}$$

dépendant linéairement des deux paramètres A et B. Cette fonction $H(\varphi)$ se trouve parfaitement déterminée si on lui impose les conditions

$$H(\varphi_1) = h_1, \qquad H(\varphi_2) = h_2, \tag{9}$$

h_1 et h_2 désignant des quantités réelles et finies, et φ_1, φ_2 des angles quelconques dont la différence ne soit pas un multiple exact de $\frac{\pi}{\varrho}$. En effet, on tire immédiatement de ces conditions

$$A\sin\varrho(\varphi_2 - \varphi_1) = \quad h_1\sin\varrho\varphi_2 - h_2\sin\varrho\varphi_1,$$
$$B\sin\varrho(\varphi_2 - \varphi_1) = -h_1\cos\varrho\varphi_2 + h_2\cos\varrho\varphi_1.$$

On voit que A et B sont fonctions continues de h_1, h_2, φ_1, φ_2 tant que φ_1 et φ_2 satisfont à l'inégalité

$$0 < |\varphi_1 - \varphi_2| < \frac{\pi}{\varrho}.$$

Si $|\varphi_1 - \varphi_2| = \frac{\pi}{\varrho}$, les conditions (9) ne sont compatibles que si l'on a $h_1 + h_2 = 0$. Dans ce cas, ces conditions se réduisent à une seule, et il existe une infinité de fonctions $H(\varphi)$ qui les vérifient.

10. Après ces préliminaires, nous allons établir le théorème fondamental qui suit:

Soient deux fonctions monogènes, $f(x)$ et $V(x)$, telles qu'il est dit au nº 9, et admettons en outre que les inégalités

$$\frac{\log|f(re^{i\varphi_1})|}{V(r)} < h_1 + \varepsilon, \quad \frac{\log|f(re^{i\varphi_2})|}{V(r)} < h_2 + \varepsilon \tag{10}$$

subsistent dès que r dépasse une certaine limite, ε désignant un nombre positif qu'on

[1] Il est commode, dans ce qui suit, de se représenter les fonctions $H(\varphi)$ et $h(\varphi)$ par des courbes, en prenant φ pour abscisse. A la première de ces fonctions correspondra une sinusoide de période $\frac{2\pi}{\varrho}$, oscillant autour de l'axe des abscisses.

Dans cette représentation, les propriétés de la fonction $h(\varphi)$ démontrées aux nºs 13—17 deviennent à peu près intuitives, dès qu'on s'est bien rendu compte de la signification géométrique des propositions établies au nº 12.

peut choisir arbitrairement petit, h_1 *et* h_2 *des quantités finies quelconques, et* φ_1, φ_2 *des valeurs de* φ *comprises dans l'intervalle* (4) *et vérifiant la condition*

$$|\varphi_1 - \varphi_2| < \frac{\pi}{\varrho}\cdot$$

Cela étant, si l'on désigne par $H_{1,2}(\varphi)$ *la fonction* (8) *que déterminent univoquement les conditions*

$$H_{1,2}(\varphi_1) = h_1, \quad H_{1,2}(\varphi_2) = h_2,$$

on aura nécessairement, quelque petit que soit ε,

$$\frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{V(r)} < H_{1,2}(\varphi) + \varepsilon \tag{11}$$

dès que φ *satisfera aux inégalités*

$$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$$

et que r *dépassera une certaine limite finie, indépendante de* φ.

Pour la démonstration, nous formerons d'abord la fonction $H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi)$ de la forme (8) qui vérifie les conditions

$$H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi_1) = h_1 + \sigma, \quad H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi_2) = h_2 + \sigma, \tag{12}$$

σ désignant une quantité positive arbitraire. Nous écrirons cette fonction sous la forme

$$H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi) = A^{(\sigma)} \cos\varrho(\varphi - \varphi_0) + B^{(\sigma)} \sin\varrho(\varphi - \varphi_0),$$

en posant

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\cdot$$

Puis nous formerons l'expression

$$K(x) = e^{-(A^{(\sigma)} - iB^{(\sigma)})\, V(xe^{-i\varphi_0})}.$$

Cette expression définit évidemment une fonction régulière pour $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$ et pour les valeurs suffisamment grandes de r. D'autre part, d'après les propriétés de $V(x)$, on aura

$$|K(x)| = e^{-[H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi) + \varepsilon(r,\varphi)]\, V(r)},$$

$\varepsilon(r, \varphi)$ tendant uniformément vers zéro pour $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$ lorsque r augmente indéfiniment. Il en résulte, d'après (10) et (12), que le module du produit

$$F(x) = K(x) \, . \, f(x)$$

reste inférieur à l'expression

$$e^{-V(r)\,[\sigma - \varepsilon + \varepsilon(r,\varphi)]}$$

pour $\varphi = \varphi_1$ et pour $\varphi = \varphi_2$ dès que r dépasse une certaine limite, et cela quelque petit que soit ε.

Le module de $F(x)$ restera donc inférieur à une certaine constante C sur tout le bord du domaine

$$\varphi_1 < \varphi < \varphi_2, \quad r > R,$$

si R est choisi suffisamment grand, et comme $F(x)$ est dans ce domaine d'un ordre au plus égal à ϱ, tandis que le domaine fait partie d'un angle plus petit que $\frac{\pi}{\varrho}$, il résulte des n°s 4 et 5 qu'on a $|F(x)| < C$, ou bien

$$|f(x)| < C e^{[H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi) + \varepsilon(r,\varphi)]\, V(r)},$$

pour tout point intérieur au domaine en question.

En observant que $H_{1,2}^{(\sigma)}(\varphi)$ converge uniformément vers $H_{1,2}(\varphi)$ lorsque σ tend vers zéro, on en conclut bien que l'inégalité (11) a lieu pour $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$ dès que r est suffisamment grand, c. q. f. d.

11. Avant de poursuivre les conséquences qu'on peut tirer de ce théorème fondamental pour l'étude de la fonction $h(\varphi)$, nous allons en déduire un résultat dont nous aurons besoin plus loin.

Si, dans un intervalle $a' \leqq \varphi \leqq b'$ compris tout entier à l'intérieur de l'intervalle (4), *on a constamment*

$$h(\varphi) \leqq A,$$

A étant une constante, on aura nécessairement, quelque petit que soit ε,

$$|f(x)| < e^{(A+\varepsilon)\, V(r)} \tag{13}$$

dès que φ satisfera aux inégalités

$$a' \leqq \varphi \leqq b'$$

et que r dépassera une certaine limite finie, indépendante de φ.

En effet, divisons l'intervalle en question en un nombre fini d'intervalles partiels, chacun inférieur ou égal à $\frac{2}{\varrho} \arccos \frac{A}{A + \frac{1}{2}\varepsilon}$. Soient φ_1 et φ_2 les valeurs extrêmes d'un tel intervalle. En faisant $h_1 = h_2 = A$ on trouvera

$$H_{1,2}(\varphi) = \frac{A \cos \varrho \left(\varphi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}{\cos \varrho \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}},$$

et on aura par conséquent

$$H_{1,2}(\varphi) \leqq A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le théorème du n° 10 nous permet donc de conclure qu'on aura

$$|f(x)| < e^{(A+\varepsilon)V(r)}$$

pour $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$, dès que r dépassera une certaine limite finie. On déterminera de la sorte une limite pour chacun des intervalles en lesquels l'intervalle $a' \leqq \varphi \leqq b'$ a été divisé; dès que r sera supérieur à la plus grande de ces limites, l'inégalité (13) sera satisfaite dans tout l'intervalle $a' \leqq \varphi \leqq b'$.

Tacitement, nous avons supposé ci-dessus la constante A positive; si elle est négative ou nulle, la démonstration se simplifie.

12. Le théorème du n° 10 conduit immédiatement à cette propriété fondamentale de la fonction $h(\varphi)$, définie par l'égalité (7):

Admettons que, pour deux valeurs φ_1 et φ_2 de φ, comprises dans l'intervalle (4) *et telles que $|\varphi_1 - \varphi_2| < \frac{\pi}{\varrho}$, on ait*

$$h(\varphi_1) \leqq H(\varphi_1), \quad h(\varphi_2) \leqq H(\varphi_2),$$

$H(\varphi)$ désignant une fonction déterminée de la forme (8)*; on aura aussi*

$$h(\varphi) \leqq H(\varphi)$$

pour toute valeur de φ intermédiaire entre φ_1 et φ_2.

Par un raisonnement facile on en conclut cette autre propriété de $h(\varphi)$:

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ trois valeurs de φ telles que $|\varphi_3 - \varphi_1| < \frac{\pi}{\varrho}$ et que φ_2 soit intermédiaire entre φ_1 et φ_3. Si

$$h(\varphi_1) \leqq H(\varphi_1), \quad h(\varphi_2) \geqq H(\varphi_2),$$

on aura nécessairement

$$h(\varphi_3) \geqq H(\varphi_3).$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait choisir la quantité positive σ de telle manière qu'on eût $h(\varphi_3) \leqq H(\varphi_3) - \sigma$. En posant

$$\overline{H}(\varphi) = H(\varphi) - \sigma \frac{\sin \varrho(\varphi - \varphi_1)}{\sin \varrho(\varphi_3 - \varphi_1)},$$

ce qui est toujours une fonction de la forme (8), on aurait alors

$$\overline{H}(\varphi_1) = H(\varphi_1), \quad \overline{H}(\varphi_2) < H(\varphi_2), \quad \overline{H}(\varphi_3) = H(\varphi_3) - \sigma,$$

d'où

$$h(\varphi_1) \leqq \overline{H}(\varphi_1), \quad h(\varphi_3) \leqq \overline{H}(\varphi_3).$$

D'après le théorème du n° 10, il en résulterait $h(\varphi_2) \leqq \overline{H}(\varphi_2)$ et, par suite,

$$h(\varphi_2) < H(\varphi_2),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

En appliquant deux fois de suite la proposition qui précède, on arrive au résultat suivant qui est, à un certain point de vue, plus général:

Étant données deux valeurs φ_1 et φ_2 de φ, telles que

$$|\varphi_1 - \varphi_2| < \frac{\pi}{\varrho},$$

admettons que $h(\varphi_2)$ soit finie et que

$$h(\varphi_1) \leqq H(\varphi_1), \quad h(\varphi_2) = H(\varphi_2),$$

$H(\varphi)$ désignant une fonction déterminée de la forme (8); *on aura nécessairement*

$$h(\varphi) \geqq H(\varphi)$$

tant que $|\varphi - \varphi_2| < \frac{\pi}{\varrho}$ et que $\varphi - \varphi_2$ et $\varphi_1 - \varphi_2$ seront de signes différents.

Supposons par exemple $\varphi_1 < \varphi_2$, et choisissons une valeur φ_3 de telle sorte que $\varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_1 + \frac{\pi}{\varrho}$. Une première application de la proposition ci-dessus nous donnera

$$h(\varphi) \geqq H(\varphi) \text{ pour } \varphi_2 \leqq \varphi \leqq \varphi_3.$$

Puis, partant des relations

$$h(\varphi_2) = H(\varphi_2), \quad h(\varphi_3) \geqq H(\varphi_3),$$

et appliquant encore une fois la même proposition, nous trouvons

$$h(\varphi) \geqq H(\varphi) \text{ pour } \varphi_3 \leqq \varphi < \varphi_2 + \frac{\pi}{\varrho}.$$

L'inégalité $h(\varphi) \geqq H(\varphi)$ subsiste donc pour $\varphi_2 \leqq \varphi < \varphi_2 + \frac{\pi}{\varrho}$, c. q. f. d.

13. En resserrant un peu les hypothèses, nous démontrerons maintenant ce résultat assez précis:

Admettons que

$$h(\varphi_1) \leqq h_1, \quad h(\varphi_2) = h_2, \quad h(\varphi_3) \leqq h_3,$$

h_1, h_2, h_3 désignant des quantités finies quelconques et $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ des valeurs de φ comprises dans l'intervalle (4) et satisfaisant aux inégalités

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\varrho}, \quad \varphi_3 - \varphi_2 < \frac{\pi}{\varrho}.$$

Cela étant, la fonction $h(\varphi)$ reste finie et continue pour $\varphi_1 < \varphi < \varphi_3$ et, de plus, le rapport

$$\frac{h(\varphi + \delta) - h(\varphi)}{\delta} \tag{14}$$

reste compris entre des limites finies lorsque δ tend vers zéro.

En effet, en désignant par $H_{1,2}(\varphi)$ la fonction (8) qui prend pour $\varphi = \varphi_1$ la valeur h_1 et pour $\varphi = \varphi_2$ la valeur h_2, et, d'une manière analogue, par $H_{2,3}(\varphi)$ la fonction de la même forme qui prend pour $\varphi = \varphi_2$ la valeur h_2 et pour $\varphi = \varphi_3$ la valeur h_3, on aura, d'après les propriétés démontrées au n° 12,

$$\begin{aligned} &\text{pour } \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2: \quad H_{2,3}(\varphi) \leq h(\varphi) \leq H_{1,2}(\varphi), \\ &\text{pour } \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3: \quad H_{1,2}(\varphi) \leq h(\varphi) \leq H_{2,3}(\varphi). \end{aligned}$$

Ces inégalités nous montrent d'abord que la fonction $h(\varphi)$ reste finie dans l'intervalle de φ_1 à φ_3. D'autre part, en observant que

$$H_{1,2}(\varphi_2) = H_{2,3}(\varphi_2) = h(\varphi_2),$$

on en conclut

$$\frac{H_{1,2}(\varphi) - H_{1,2}(\varphi_2)}{\varphi - \varphi_2} \leq \frac{h(\varphi) - h(\varphi_2)}{\varphi - \varphi_2} \leq \frac{H_{2,3}(\varphi) - H_{2,3}(\varphi_2)}{\varphi - \varphi_2}$$

pour les valeurs de φ comprises entre φ_1 et φ_3. On voit donc que la fonction $h(\varphi)$ est continue et que le rapport (14) reste compris entre des limites finies pour la valeur φ_2 de φ. Pour étendre ces conclusions à toute autre valeur φ_2' située dans l'intervalle de φ_1 à φ_3, il suffit de choisir dans cet intervalle deux valeurs φ_1' et φ_3' de manière que

$$\varphi_1' < \varphi_2' < \varphi_3', \quad \varphi_2' - \varphi_1' < \frac{\pi}{\varrho}, \quad \varphi_3' - \varphi_2' < \frac{\pi}{\varrho},$$

et de répéter le raisonnement ci-dessus, en remplaçant seulement $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ par $\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3'$ et h_1, h_2, h_3 par les quantités

$$h_1' = h(\varphi_1'), \quad h_2' = h(\varphi_2'), \quad h_3' = h(\varphi_3').$$

14. En supposant désormais la fonction $h(\varphi)$ finie dans l'intervalle (4), nous déduirons encore quelques propriétés caractéristiques de cette fonction.

Étant finie, la fonction $h(\varphi)$ est nécessairement aussi continue, comme nous venons de voir. Si elle est positive pour une valeur donnée de φ, elle restera donc positive dans un certain intervalle, limité par des valeurs de φ pour lesquelles la fonction s'annule (ou par l'une, ou toutes les deux, des valeurs a et b), et les valeurs φ pour lesquelles $h(\varphi)$ est négative appartiendront à des intervalles limités de la même manière.

On peut démontrer plusieurs propriétés intéressantes relatives à ces intervalles où $h(\varphi)$ garde un signe invariable.

Un intervalle où la fonction $h(\varphi)$ est négative est limitrophe des deux côtés d'intervalles où elle est positive, à moins qu'il n'aboutisse à l'un des points a et b.

Soit φ_0 une valeur de φ, comprise entre a et b, pour laquelle $h(\varphi)$ s'annule et qui limite un intervalle où $h(\varphi) < 0$. Choisissons dans cet intervalle une valeur φ_1 telle que $|\varphi_1 - \varphi_0| < \frac{\pi}{\varrho}$, et formons la fonction $H_{0,1}(\varphi)$ de la forme (8) qui vérifie les conditions

$$H_{0,1}(\varphi_0) = h(\varphi_0) = 0, \quad H_{0,1}(\varphi_1) = h(\varphi_1) < 0.$$

Cette fonction peut évidemment se mettre sous la forme

$$H_{0,1}(\varphi) = C \sin \varrho (\varphi - \varphi_0),$$

C désignant une constante. Comme $H_{0,1}(\varphi_1) < 0$, on en conclut immédiatement que $H_{0,1}(\varphi) > 0$ pour les valeurs φ telles que $|\varphi - \varphi_0| < \frac{\pi}{\varrho}$ et que $\varphi - \varphi_0$ et $\varphi_1 - \varphi_0$ soient de signes contraires.

Or il résulte de la dernière proposition du nº 11 qu'on a pour ces valeurs de φ, à condition toutefois qu'on ne sorte pas de l'intervalle (4), $h(\varphi) \geqq H_{0,1}(\varphi)$ et, par suite, $h(\varphi) > 0$. L'intervalle considéré, où $h(\varphi) < 0$, est donc contigu au point φ_0 à un intervalle où $h(\varphi) > 0$, ce que nous voulions démontrer. Mais notre raisonnement nous a fourni en même temps cette nouvelle propriété de la fonction $h(\varphi)$.

Tout intervalle où $h(\varphi)$ est positive, et qui est limité par des valeurs φ pour lesquelles $h(\varphi)$ s'annule, est d'une étendue supérieure ou égale à $\frac{\pi}{\varrho}$.

Les intervalles où $h(\varphi)$ est positive seront donc nécessairement en nombre limité, si l'intervalle donnée (4) est fini. Il en sera évidemment de même des intervalles où $h(\varphi)$ est négative et aussi de ceux où $h(\varphi)$ garde constamment la valeur zéro, puisque l'un quelconque de ces intervalles, s'il n'aboutit pas à un des points a et b, est limitrophe des deux côtés d'intervalles où $h(\varphi)$ est positive. Donc:

Si l'intervalle (4) *est fini, on peut le diviser en un nombre limité de sous-intervalles tels que, dans chacun d'eux, la fonction* $h(\varphi)$ *ou garde un signe invariable, ou reste constamment nulle.*

Nous démontrerons enfin cette proposition:

L'étendue d'un intervalle où $h(\varphi)$ *est négative ne saurait être supérieure à* $\frac{\pi}{\varrho}$.

S'il en était autrement, on pourrait, en effet, trouver une valeur φ_0 telle que $h(\varphi)$ serait négative pour chacune des trois valeurs $\varphi_0 - \frac{\pi}{2\varrho}$, φ_0, $\varphi_0 + \frac{\pi}{2\varrho}$. Soit C une constante inférieure à $h(\varphi_0)$ et posons

$$H(\varphi) = C \cos \varrho(\varphi - \varphi_0),$$

ce qui est une fonction de la forme (8) s'annulant pour $\varphi = \varphi_0 - \frac{\pi}{2\varrho}$ et pour $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2\varrho}$. En choisissant le nombre positif δ suffisamment petit, on aurait alors, à cause de la continuité des fonctions $h(\varphi)$ et $H(\varphi)$, $h(\varphi) < H(\varphi)$ pour chacune des valeurs $\varphi_0 - \frac{\pi}{2\varrho} + \delta$ et $\varphi_0 + \frac{\pi}{2\varrho} - \delta$, dont la différence est inférieure à $\frac{\pi}{\varrho}$, tandis que $h(\varphi) > H(\varphi)$ pour la valeur intermédiaire φ_0. On se trouverait ainsi en contradiction avec le résultat établi au nº 12.

15. On peut de différentes manières déterminer une limite supérieure de la valeur absolue de $h(\varphi)$ dans un intervalle où cette fonction est négative. Le théorème le plus simple qu'on puisse démontrer dans cet ordre d'idées est le suivant:

Si $h(\varphi_0) = 0$, *on aura*

$$h(\varphi_0 + x) + h(\varphi_0 - x) \geqq 0$$

tant que $0 < x < \frac{\pi}{\varrho}$ [*pourvu qu'on ne sorte pas de l'intervalle* (4)].

Déterminons, en effet, la fonction (8) par les conditions

$$H(\varphi_0) = h(\varphi_0) = 0, \quad H(\varphi_0 + x) = h(\varphi_0 + x),$$

la valeur x étant comprise entre 0 et $\frac{\pi}{\varrho}$. On aura d'après le nº 12

$$h(\varphi) \geqq H(\varphi) \quad \text{pour} \quad \varphi_0 - \frac{\pi}{\varrho} < \varphi < \varphi_0.$$

En faisant $\varphi = \varphi_0 - x$ et en observant qu'on a

$$H(\varphi_0 - x) = -H(\varphi_0 + x) = -h(\varphi_0 + x),$$

on en tire l'inégalité voulue.

Notons la conclusion suivante qui résulte immédiatement de cette inégalité:

Si un intervalle où $h(\varphi) < 0$ est limitrophe des deux côtés d'intervalles où $h(\varphi) > 0$ et aux extrémités desquels $h(\varphi) = 0$, le minimum de $h(\varphi)$ dans le premier intervalle est, en valeur absolue, au plus égal à son maximum dans l'un des intervalles voisins.

Le théorème démontré ci-dessus n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du suivant, qui exprime sous une forme assez élégante la propriété la plus générale de la fonction $h(\varphi)$:

Si φ_1, φ_2, φ_3 sont trois valeurs quelconques de φ, comprises dans un intervalle où la fonction $h(\varphi)$ reste finie et qui vérifient les conditions

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\varrho}, \quad \varphi_3 - \varphi_2 < \frac{\pi}{\varrho},$$

on aura

$$h(\varphi_1)\sin\varrho(\varphi_3 - \varphi_2) + h(\varphi_2)\sin\varrho(\varphi_1 - \varphi_3) + h(\varphi_3)\sin\varrho(\varphi_2 - \varphi_1) \geqq 0.$$

En effet, toute fonction $H(\varphi)$ satisfait à l'identité

$$H(\varphi_1)\sin\varrho(\varphi_3 - \varphi_2) + H(\varphi_2)\sin\varrho(\varphi_1 - \varphi_3) + H(\varphi_3)\sin\varrho(\varphi_2 - \varphi_1) = 0.$$

En spécialisant $H(\varphi)$ de manière que

$$H(\varphi_1) = h(\varphi_1), \quad H(\varphi_2) = h(\varphi_2),$$

et en observant qu'on a dans ce cas, d'après le nº 12,

$$h(\varphi_3) \geqq H(\varphi_3),$$

on obtient précisément l'inégalité ci-dessus.

16. Revenons encore une fois sur la propriété fondamentale de la fonction $h(\varphi)$ établie au nº 12. Si, dans la dernière forme donnée à cette propriété, on fait tendre φ_1 et φ_2 vers une même valeur φ_0, on aura à la limite ce nouveau résultat, dont nous nous proposons de donner ici une démonstration directe et rigoureuse.

Si la fonction $h(\varphi)$ a un maximum ou un minimum pour $\varphi = \varphi_0$, ou, plus généralement, si la fonction est stationnaire pour cette valeur de φ, en sorte que la différence $h(\varphi) - h(\varphi_0)$ ne change pas de signe lorsque φ varie dans un certain entourage de φ_0, et si $H_{0,0}(\varphi)$ désigne la fonction (8) qui pour $\varphi = \varphi_0$ est égale à $h(\varphi_0)$ et a la dérivée nulle, fonction qui peut évidemment se mettre sous la forme

$$H_{0,0}(\varphi) = h(\varphi_0)\cos\varrho(\varphi - \varphi_0),$$

on aura $h(\varphi) \geqq H_{0,0}(\varphi)$ pour $\varphi_0 - \frac{\pi}{\varrho} < \varphi < \varphi_0 + \frac{\pi}{\varrho}$, à condition qu'on ne sorte pas de l'intervalle (4).

Supposons en effet qu'on ait $h(\varphi_1) < H_{0,0}(\varphi_1)$ pour une valeur φ_1 comprise entre les limites indiquées, et, pour fixer les idées, admettons par exemple que $\varphi_0 - \frac{\pi}{\varrho} < \varphi_1 < \varphi_0$. Si nous formons la fonction $H_{0,1}(\varphi)$ de la forme (8) qui est égale à $h(\varphi)$ pour $\varphi = \varphi_0$ et pour $\varphi = \varphi_1$, la différence

$$H_{0,1}(\varphi) - H_{0,0}(\varphi) \equiv \text{Const.} \sin \varrho(\varphi - \varphi_0),$$

étant négative pour $\varphi = \varphi_1$, aura nécessairement une dérivée positive pour $\varphi = \varphi_0$, et comme $H'_{0,0}(\varphi_0) = 0$, il en résulte que $H'_{0,1}(\varphi_0) > 0$. En choisissant le nombre positif δ suffisamment petit, on aura donc

$$H_{0,1}(\varphi_0 - \delta) < H_{0,1}(\varphi_0) < H_{0,1}(\varphi_0 + \delta).$$

Mais $H_{0,1}(\varphi_0) = h(\varphi_0)$, et d'autre part, d'après le nº 12,

$$h(\varphi_0 - \delta) \leq H_{0,1}(\varphi_0 - \delta), \quad h(\varphi_0 + \delta) \geq H_{0,1}(\varphi_0 + \delta).$$

Par suite, on aura nécessairement

$$h(\varphi_0 - \delta) < h(\varphi_0) < h(\varphi_0 + \delta),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

On peut tirer de ce théorème plusieurs conséquences, parmi lesquelles nous signalerons ici les suivantes:

Si la fonction $h(\varphi)$, dans un intervalle où elle est positive, est stationnaire pour une certaine valeur φ_0 de φ, cette valeur divise l'intervalle en deux parties, dont chacune est supérieure ou égale à $\frac{\pi}{2\varrho}$.

Dans un intervalle où $h(\varphi)$ est négative, il ne peut y avoir qu'une seule valeur $\varphi = \varphi_0$ pour laquelle cette fonction est stationnaire. Cette valeur φ_0 correspond à un vrai minimum de la fonction $h(\varphi)$, et divise l'intervalle en question en deux parties dont aucune n'est supérieure à $\frac{\pi}{2\varrho}$.

Dans les deux cas, on suppose que l'intervalle considéré ne soit limité par aucun des points a et b.

17. Les théorèmes que nous venons de démontrer sur la fonction $h(\varphi)$ peuvent tous être complétés dans une certaine direction. On aura d'abord cette proposition générale:

Si l'égalité

$$h(\varphi) = H(\varphi),$$

où $H(\varphi)$ désigne une fonction déterminée de la forme (8), *a lieu pour trois valeusr φ_1, φ_2, φ_3 de φ, telles que*

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3, \quad \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\varrho}, \quad \varphi_3 - \varphi_2 < \frac{\pi}{\varrho},$$

elle subsiste pour toute valeur de φ comprise entre φ_1 et φ_3.

Cette proposition découle immédiatement du n° 13, en observant que les fonctions désignées respectivement par $H_{1,2}(\varphi)$ et $H_{2,3}(\varphi)$ coïncident actuellement avec $H(\varphi)$.

On démontre de même:

Si un intervalle où $h(\varphi)$ est positive est limité par des valeurs de φ pour lesquelles $h(\varphi) = 0$, et si l'étendue de cet intervalle est précisément égale à $\frac{\pi}{\varrho}$, la fonction $h(\varphi)$ s'y réduit à une fonction de la forme (8).

Si un intervalle où $h(\varphi)$ est négative est précisément d'étendue $\frac{\pi}{\varrho}$, $h(\varphi)$ y coïncide avec une fonction de la forme (8).

Si $h(\varphi)$ est stationnaire pour $\varphi = \varphi_0$, et si l'égalité

$$h(\varphi) = H_{0,0}(\varphi) = h(\varphi_0)\cos\varrho(\varphi - \varphi_0)$$

a lieu pour une valeur φ_1 telle que $|\varphi_1 - \varphi_0| < \frac{\pi}{\varrho}$, elle subsiste aussi pour toute valeur de φ comprise entre φ_0 et φ_1.

En particulier, si $h(\varphi)$ est stationnaire pour $\varphi = \varphi_0$ et s'annule pour une des valeurs $\varphi_0 \pm \frac{\pi}{2\varrho}$, l'égalité ci-dessus subsiste dans l'intervalle compris entre φ_0 et cette valeur.

Les démonstrations de ces propriétés sont trop faciles à trouver pour que nous ayons besoin de nous y arrêter.

18. Jusqu'ici nous avons supposé constamment $\varrho > 0$. Dans le cas où $\varrho = 0$ on aura, d'après les hypothèses admises au n° 9,

$$V(re^{i\varphi}) = V(r)[1 + \varepsilon(r, \varphi)],$$

où $\varepsilon(r, \varphi)$ tend uniformément vers zéro pour $a < \varphi < b$ lorsque r augmente indéfiniment, et il en résulte que la fonction que nous avions désignée par $H(\varphi)$ se réduit actuellement à une constante. A cette différence près, le raisonnement donné au n° 10 reste encore valable et conduit à cette propriété générale de la fonction $h(\varphi)$:

Si φ_1, φ_2, φ_3 sont des valeurs consécutives quelconques de φ comprises dans l'intervalle (4), on ne saurait avoir à la fois

$$h(\varphi_2) > h(\varphi_1) \quad \text{et} \quad h(\varphi_2) > h(\varphi_3).$$

Evidemment, ces inégalités ne nous permettent pas de conclure que la fonction $h(\varphi)$ soit continue.

On arrive à des résultats plus précis en supposant la fonction $V(x)$ de la forme (6) page 389. En effet, on constante aisément que, dans ce cas, la partie réelle de l'expression

$$i \log x \,.\, V(x)$$

est de la forme

$$-(\alpha_1 + 1)\varrho V(r)[1 + \varepsilon(r, \varphi)],$$

$\varepsilon(r, \varphi)$ ayant la même propriété que ci-dessus. Si, dans la démonstration donnée au n° 10, on remplace l'expression $K(x)$ par la suivante

$$e^{-[A' + iB' \log(xe^{-i\varphi_0})]\, V(xe^{-i\varphi_0})},$$

on retrouve notre théorème fondamental, avec cette modification que la fonction $H(\varphi)$ aura maintenant la forme

$$A + B\varphi,$$

A et B désignant, comme A' et B', des constantes réelles. Il en résulte que la fonction $h(\varphi)$ jouit des propriétés démontrées aux n°s 12 et 13, et, en particulier, qu'elle est continue dans tout intervalle où elle reste finie.

19. En terminant, nous appliquerons les résultats précédents au cas où *la fonction $f(x)$ est uniforme et régulière dans un certain voisinage du point à l'infini.* Nous admettrons de plus que, pour toute valeur positive de ε, l'inégalité

$$(15) \qquad |f(x)| < e^{(A+\varepsilon)\, V(r)}$$

subsiste dès que r est supérieur à une certaine limite, et l'inégalité

$$(16) \qquad |f(x)| > e^{(A-\varepsilon)\, V(r)}$$

du moins pour une infinité de points x dont les modules vont en croissant indéfiniment, A désignant une constante *positive* ou *nulle* (si cette constante était négative, la fonction $f(x)$ serait nécessairement régulière à l'infini) et V une fonction monogène qui jouit des propriétés énumérées au n° 9 pour les valeurs de φ comprises entre les limites

$$-\omega < \varphi < \omega,$$

ω étant la plus petite des quantités $\dfrac{\pi}{2\varrho}$ et π.

Il est d'abord évident que, dans ces conditions, la fonction $h(\varphi)$ admet la période 2π, et qu'elle ne saurait dépasser la valeur A pour aucune valeur de φ. Mais elle pourra prendre des valeurs inférieures à A d'aussi peu qu'on voudra. En effet, nous avons démontré au nº 11 que l'inégalité $h(\varphi) \leq A'$, A' désignant une constante inférieure à A, aurait pour conséquence que l'inégalité

$$|f(x)| < e^{(A'+\varepsilon)\, V(r)}$$

subsisterait pour toutes les valeurs de φ dès que r serait supérieur à une certaine limite ε désignant une quantité positive arbitrairement petit. Or cette conclusion est en contradiction avec la condition (16).

Soit maintenant φ_1 une valeur quelconque pour laquelle $h(\varphi)$ est finie. Comme on a constamment $h(\varphi) \leq A$, le théorème du nº 13 nous apprend que $h(\varphi)$ reste certainement finie et continue dans l'intervalle de $\varphi_1 - \omega$ à $\varphi_1 + \omega$. Si φ_2 est une valeur quelconque comprise entre ces limites, la même conclusion s'applique évidemment à l'intervalle de $\varphi_2 - \omega$ à $\varphi_2 + \omega$, et, en continuant ainsi, on arrive à ce résultat que la fonction $h(\varphi)$ est finie et continue pour toutes les valeurs de φ.

Étant continue, la fonction $h(\varphi)$ aura nécessairement une valeur maxima qui, d'après ce qui précède, ne saurait être autre que la valeur A.

Enfin, le résultat établi au nº 15 nous permet d'affirmer que $h(\varphi)$ ne saurait être inférieure à $-A$ pour aucune valeur de φ.

Nous avons ainsi établi ce théorème, où l'on suppose $\varrho > 0$:

Sous les conditions énoncées ci-dessus, la fonction $h(\varphi)$ est finie et continue et jouit des propriétés démontrées aux nºs 11—16 pour toutes les valeurs de φ. De plus on aura constamment

$$-A \leq h(\varphi) \leq A,$$

la valeur A étant atteinte pour une valeur au moins de la variable φ.

Soit, dans le cas où A est positif, φ_0 une valeur de φ pour laquelle $h(\varphi)$ est égale à A: on aura d'après le nº 17

$$h(\varphi) \geq A \cos \varrho(\varphi - \varphi_0) \quad \text{pour} \quad |\varphi - \varphi_0| \leq 2\omega,$$

d'où ces conclusions:

Si $\varrho < \frac{1}{2}$, la fonction $h(\varphi)$ reste constamment positive, et sa valeur minima n'est pas inférieure à $A \cos \varrho\pi$.

Si $\frac{1}{2} < \varrho < 1$, la fonction $h(\varphi)$ peut prendre des valeurs négatives, mais elle ne descend pas au-dessous de la limite $A \cos \varrho\pi$, qui est supérieure à $-A$.

Nous démontrerons enfin cette proposition:

Dans le cas où $\varrho = 0$, la fonction $h(\varphi)$ garde la valeur constante A pour toutes les valeurs de φ.

Admettons, en effet, qu'on ait $h(\varphi_1) \leq A'$, A' étant inférieur à A. En appliquant le théorème du n° 10 à l'intervalle de φ_1 à $\varphi_1 + 2\pi$, remplaçant les deux quantités h_1 et h_2 par A', et remarquant qu'on a identiquement $H_{1,2}(\varphi) = A'$, on arriverait à ce résultat que l'inégalité

$$|f(x)| < e^{(A'+\varepsilon)\, V(r)}$$

est vérifiée dès que r est supérieur à une certaine limite, quelque petit que soit ε. On se trouverait ainsi en contradiction avec la condition (16).

Les résultats démontrés ci-dessus s'appliquent, en particulier, aux fonctions entières d'ordre fini.

Une question intéressante est celle du choix de la fonction $V(x)$. Évidemment, on pourra toujours mettre $V(x) = x^{\varrho}$, ϱ étant supérieur à l'ordre de la fonction $f(x)$. Mais, dans ce cas, on aura $A = 0$, et les considérations précédentes nous font voir seulement que $h(\varphi)$ s'annule pour toutes les valeurs de φ, ce qui ne constitue pas un résultat nouveau.

Dans les cas où l'on peut choisir $V(x)$ de manière que les conditions (15) et (16) soient vérifiées pour une valeur positive de la constante A, nos considérations conduisent, au contraire, à des propriétés nouvelles de la fonction $f(x)$, relatives à la manière dont elle se comporte lorsque x tend vers l'infini dans différentes directions. On sait que cette circonstance se présente toutes les fois que soit les zéros de la fonction soit les coefficients de son développement de Taylor vérifient certaines inégalités asymtotiques d'un caractère assez général. On pourrait même dire que cela a lieu pour toutes les fonctions entières qui se sont introduites naturellement dans l'Analyse.

Cependant on peut se demander si, à *chaque* fonction entière d'ordre fini, correspond une fonction monogène $V(x)$, jouissant des propriétés énumérées au n° 9, et telle qu'on ait des inégalités de la forme indiquée, la constante A étant *positive*. Nous trouverons peut-être une autre fois l'occasion de revenir sur cette question.

INHALTSVERZEICHNISS. TABLE DES MATIÈRES.

BAND 31. — 1908. — TOME 31.

Nous avons le devoir douloureux d'annoncer à nos lecteurs la mort de notre collaborateur

LORENZ LEONARD LINDELÖF

qui pendant 26 ans a appartenu à notre rédaction.

Lindelöf naquit dans la paroisse d'Ikalis en Finlande le 13 Novembre 1827. Il était attaché comme professeur à l'université de Helsingfors à partir de 1857 jusqu'à 1874. De 1874 jusqu'à 1902 il était président de la direction des lycées de la Finlande. En 1902 il démissionna et il mourut le 3 Mars dernier.

Ses travaux mathématiques les plus importants sont:

Examen critique d'une méthode récemment proposée pour distinguer le maximum et le minimum dans les problèmes du calcul des variations. (Bull. de l'Ac. R. de Belgique, Sér. 2, T. 17);

Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume. (Mélanges math. et astr. Ac. d. sc. St.-Pétersbourg. T. 4);

Sur les maxima et minima d'une fonction des rayons vecteurs menés d'un point mobile à plusieurs centres fixes. (Acta Soc. sc. Fennicæ. T. 8);

Quelques formules relatives à la courbure moyenne d'une courbe fermée. (Acta Soc. sc. Fennicæ. T. 9);

Sur les limites entre lesquelles le caténoïde est une surface minima. (Acta Soc. sc. Fennicæ. T. 9);

Une question de rentes viagères. (Acta mathematica. Bd. 3);

Trajectoire d'un corps assujetti à se mouvoir sur la surface de la terre sous l'influence de la rotation terrestre. (Acta Soc. sc. Fennicæ. T. 16);

Recherches sur les polyèdres maxima. (Acta Soc. sc. Fennicæ. T. 24);

Sur les polygones au plus petit périmètre circonscrits à une ellipse donnée. (Acta Soc. sc. Fennicæ. T. 31); 2 notes supplémentaires. (Acta Soc. sc. Fennicæ. T. 32, 33).

Il a encore publié plusieurs mémoires remarquables sur la statistique et sur les assurances sur la vie. On lui doit encore un livre excellent pour l'enseignement élémentaire sur la géométrie analytique.

Mais Lindelöf n'était pas seulement un savant des plus éminents, il était en même temps homme d'État et homme pratique. En qualité de recteur de l'université et de député à la diète finlandaise ainsi que dans d'autres positions dans la vie pratique il a rendu à sa patrie maints services de la plus haute valeur et de nature très diverse. Sa grande lucidité, véritable qualité de mathématicien, sa probité à toute épreuve et une impartialité reconnue lui donnaient une place élevée dans la société et lui assuraient la vénération de tous les coeurs nobles et droits.

Mittag-Leffler.

Bekanntmachung.

Auf Grund des von dem verstorbenen Herrn Dr. Paul Wolfskehl in Darmstadt uns zugewendeten Vermächtnisses wird hiermit ein Preis von 100 000 Mk., in Worten »Einhunderttausend Mark«, für denjenigen ausgesetzt, dem es zuerst gelingt, den Beweis des grossen Fermat'schen Satzes zu führen. Herr Dr. Wolfskehl bemerkt in seinem Testamente, dass Fermat (siehe z. B. Oeuvres de Fermat Paris 1891 t. I pg. 291 observ. II) mutatis mutandis die Behauptung aufgestellt hat, dass die Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ durch ganze Zahlen unlösbar ist für alle diejenigen Exponenten λ, welche ungrade Primzahlen sind. Dieser Fermat'sche Satz ist entweder im Sinne Fermats allgemein oder in Ergänzung der Untersuchungen von Kummer (Crelles Journal 40, S. 130 ff., Abh. der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1857) für alle die Exponenten λ zu beweisen, in denen er überhaupt Geltung hat. Ueber weitere Litteratur vergleiche man: Hilbert, Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV (1894—95) § 172—173 und Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 1, Teil 2 Arithmetik und Algebra (1900—1904) I C 4 b, S. 713.

Die Aussetzung des Preises erfolgt unter folgenden näheren Bedingungen:

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen entscheidet frei darüber, wem der Preis zuzuerkennen ist. Sie lehnt die Annahme jeder Manuskriptsendung ab, die auf die Bewerbung um den Preis für den Fermat'schen Satz Bezug hat; sie berücksichtigt für die Preiszuteilung lediglich solche mathematische Abhandlungen, die in periodischen Zeitschriften, als Monographien oder in Buchform im Buchhandel käuflich erschienen sind. Die Gesellschaft stellt dem Verfasser solcher Abhandlungen anheim, etwa 5 gedruckte Exemplare davon an sie einzusenden.

Ausser Betracht bleiben für die Verleihung des Preises solche Arbeiten, die in einer Sprache gedruckt sind, welche den zur Beurteilung der Arbeit berufenen Fachgelehrten unverständlich ist. An die Stelle solcher Arbeiten können vom Verfasser als richtig anerkannte Uebersetzungen treten.

Die Gesellschaft lehnt alle Verantwortlichkeit für eine Nichtberücksichtigung von Arbeiten ab, die nicht zu ihrer Kenntnis gelangt sind, desgleichen für alle

Irrtümer, die daraus entspringen könnten, dass der wirkliche Verfasser der Arbeit oder eines Teiles derselben als solcher der Gesellschaft unbekannt geblieben ist.

Sie behält sich für den Fall, dass an der Lösung der Aufgabe mehrere Personen beteiligt sind oder die Lösung durch die Arbeiten mehrerer Gelehrter herbeigeführt worden ist, freieste Entscheidung, insbesondere auch die Teilung des Preises nach ihrem Ermessen vor.

Die Zuerkennung des Preises durch die Gesellschaft erfolgt frühestens zwei Jahre nach der Veröffentlichung der zu krönenden Abhandlung. Es soll innerhalb dieses Zeitraumes deutschen und ausländischen Mathematikern Gelegenheit geboten werden, über die Richtigkeit der durch die Veröffentlichung bekannt gewordenen Lösung sich zu äussern.

Ist der Preis durch die Gesellschaft zuerkannt, so wird davon den Berechtigten durch den vorsitzenden Sekretär im Namen der Gesellschaft Mitteilung gemacht und solches öffentlich an allen denjenigen Orten bekannt gegeben werden, an denen der Preis im letzten Jahre ausgeschrieben war. Die Zuerkennung des Preises durch die Gesellschaft ist unanfechtbar.

Die Auszahlung des Preises erfolgt an den Berechtigten innerhalb dreier Monate nach seiner Zuerkennung durch die Königliche Universitätskasse in Göttingen oder auf Gefahr und Kosten des Empfängers an einem anderen von ihm zu bezeichnenden Orte, und zwar wird das vermachte Kapital je nach der Wahl der Gesellschaft bar oder in den hierfür hinterlegten Papieren gegen rechtsgültige Quittung zur Auszahlung gebracht. Die Auszahlung des Preises kann durch Aushändigung der hinterlegten Wertpapiere auch dann erfolgen, wenn deren Kurswert die Summe von 100 000 Mark nicht mehr erreichen sollte.

Falls der Preis bis zum 13. September 2007 nicht zuerkannt ist, können Ansprüche auf ihn nicht mehr erhoben werden.

Mit dem heutigen Tage tritt die Wolfskehlsche Preisstiftung unter den vorstehend angegebenen Bedingungen in Kraft.

Göttingen, den 27. Juni 1908.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Acta mathematica. 31.

Page 104, lignes 4 et 10, au lieu de M lire $\frac{M}{R^n}$.

» » ligne 12 au lieu de $4 M (2 R)^n$ lire $4 \frac{M 2^n}{R^n}$.

BIBLIOGRAPHIE.

J. A. Barth.

Leipzig 1906—07.

FISCHER, V., Grundbegriffe und Grundgleichungen der mathematischen Naturwissenschaft. Mit 12 Figuren. — VIII+108 p. 8. M. 4,50. (geh.)

LORENTZ, H. A., Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauche bei akademischen Vorlesungen. Nach der 4 . . . Aufl . . . übersetz von G. Siebert.

Bd 1. Mit 236 Abbildungen. 482 p. 8. M. 8—. (M. 9— geb.)

Bd 2. Mit 257 Abbildungen. 621 p. 8. M. 10—. (M. 11— geb.)

Cambridge University Press.

1904—07.

BROMWICH, T. J I'A., Quadratic forms and their classification by means of invariant factors. (Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. No. 3.) — VIII+100 p. 8. Sh. 3. 6 d.

FORSYTH, A. R., Theory of differential equations. Part 4 (Vols. 5 & 6): Partial diff. equations. — XX+478 & XIII+596 p. 8. Sh. 25—.

Vol. 5: Two existence-theorems. Cauchy's theorem. Linear equations and complete linear systems. Non-lin. eq.: Jacobi's 2nd method, with Mayer's developments. Classes of integrals possessed by eq. of the first order: generalisation of integrals. The method of characteristics for eq. in two independent variables: geometrical relations of the various integrals. Singulàr integrals and their geometrical properties: singularities of the characteristics. The method of characteristics in any number of independent variables. Lie's methods applied to eq. of thet first order. The eq. of theoretical dynamics. Simultaneous eq. of the first order.

Vol. 6: General integrals of eq. of orders higher than the first. Lin. eq. of the 2nd order in two independent variables: the Laplace-transformations. Adjoint eq.: lin. eq. having equal invariants. Forms of eq. of the 2nd order in 2 independent variables having their general integrals in explicit finite form. Eq. of the 2nd order in 2 indep. variables having an intermediate integral. Ampère's method applied to eq. of the 2nd order in 2 indep. variables. Darboux's method and other methods for eq. Generalisation of integrals. Characteristics of eq. of 2nd order: intermediate integrals. General transformation of eq. of the 2nd order. Eq. of the 3rd and higher orders, in

2 independent variables. Eq. of the 2nd order in more than 2 indep. variables, having an intermediate integral. Eq. of the 2nd order in 3 indep. variables, not necessarily having an intermediate integral. Index to part 4.

HARDY, G. H., The integration of functions of a single variable. (Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. No. 2.) — VIII + 53 p. 8. Sh. 2. 6 d.

LAMB, H., Hydrodynamics. 3:d ed. XV + 634 p. 8. Sh. 20—.

The equations of motion. Integration of the equations in special cases. Irrotational motion. Motion of a liquid in two dimensions. Irrotational motion of a liquid: problems in three dimensions. On the motion of solids through a liquid: dynamical theory. Vortex motion. Tidal waves. Surface-waves. Waves of expansion. Viscosity. Rotating masses of liquid. List of authors cited. Index.

RUSSELL, A., A treatise on the theory of alternating currents. Vol. 1—2. (Cambr. psysical series). — XII + 488 & XII + 407 p. 8. Sh. 12— (each).

RUTHERFORD, E., Radio-activity. 2:d ed. — XIV + 580 p. 8. Sh. 12. 6 d. (Cloth).

STOKES, G. G., Memoir and scientific correspondence. Vol. 1—2. — XII + 476 & VIII + 508 p. 8. Sh. 12— each. (Cloth.)

Vol. 1: Personal and biographical. By Mrs. Laurence Humphry. — General scientific career. Special scientific correspondence. 3 Plates.

Vol. 2: Special scientific correspondence. 1 Plate.

THOMSON, J. J., Conduction of electricity through gases. 2:d ed. — VI + 678 p. 8. Sh. 16—

Electrical conductivity of gases in a normal state. Properties of a gas when in the conducting state. Mathematical theory of the conduction of electr. through a gas containing ions. Effect produced by a magnetic field on the motion of the ions. Determination of the ratio of the charge to the mass of an ion. Determ. of the charge carried by the negative ion. On some physical properties of gaseous ions. Ionisation by incandescent solids. Ionisation in gases from flames. Ionisation by light. Photoelectric effects. Ionisation by Röntgen rays. Rays from radio-active substances. Power of the elements in general to emit ionising radiation. Ionisation due to chemical action, the bubbling of air through water, and the splashing of drops. Spark discharge. Discharge throngh gases at low pressures. Theory of the discharge through vacuum tubes. The electric arc. Cathode rays. Röntgen rays. Properties of moving electrified bodies. Index.

WHITEHEAD, A. N., The axioms of projective geometry. (Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. No. 4.) — VIII + 64 p. 8. Sh. 2. 6 d.

WHITEHEAD, A. N., The axioms of descriptive geometry. (Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. No. 5.) — VIII + 74 p. 8. Sh. 2. 6 d.

Carnegie Institution of Washington.

1907.

HILL, G. W., The collected mathematical works. Vol. 4. — VI + 460 p. 4.

E. Casañal.

Zaragoza 1904—05.

Galdeano, Zoel G. de, Tratado de análisis matemático. T. 3—5. (Nueva enciclopedia matematica. T. VI—VIII.)

T. 3: Aplicación del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras planas. 320 p. 8. — T. 4: Cálculo integral. 444 p. 8. — T. 5: Aplicaciones del cálculo infinitesimal al estudio de las figuras en el espacio. 576 p. 8. —

The Clarendon Press.

Oxford 1907.

Mair, D., A school course of mathematics. — VIII + 379 p. 8. Sh. 3. 6 d.

Gustav Fischer.

Jena 1907.

Lohmüller, A., Sterblichkeitsuntersuchungen auf Grund des Materials der Stuttgarter Lebensversicherungsbank a. G. (Alte Stuttgarter) 1854—1901. Mit 3 Tafeln und 3 Abbildungen im Text. — 170 p. 8.

Carl Fromme.

Wien und Leipzig 1907.

Kozák, J., Grundprobleme der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. — XV + 263 p. 8.

Fehlergattungen. Fehlergesetz. Genauigkeitsmasse. Direkte Beobachtungen. Vermittelnde Beobacht. Bedingte Beobacht. Vergleichung des Fehlergesetzes mit der Erfahrung. Der kleinste u. der grösste Fehler einer Beobachtungsreihe. Ausscheidung widersprechender Beobachtungen. Tabellen.

Gauthier-Villars.

Paris 1906—07.

Adhémar, R. d', Les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles. (Scientia No. 29.) — 86 p: 8. Fr. 2— (cartonné.)

Éq. du 1. ordre à n variables indépend. Éq. générales du 2. ordre à 2 variables indépend. Éq. du type hyperbol. à 2 variables indépend. Esquisse d'une théorie générale des caractéristiques. L'éq. des ondes généralisée. Généralisations et remarques.

Arnoux, G., Arithmétique graphique. Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques. (Essais de psychologie et de metaphysique positives.) — XX + 225 p. 8. Fr. 7,50.

Multiplication et division des entiers. Puissances et racines des entiers. Fonctions réductibles et irréductibles. Racines de l'unité. Imaginaires de Galois. Recherche

des racines réelles. Recherche des racines imaginaires. Variations des fonctions arithmétiques. Étude du premier et du deuxième degrés. Étude du troisième degré. Notes: s. les modules composés; s. l'indicateur; s. le théorème de Wilson; au sujet des tables de puissances d'imaginaires; s. une démonstration de Lebesgue.

Baire, R., Leçons sur les théories génerales de l'analyse. T. 1. — X+232 p. 8.

Nombres irrationnels, limites, continuité. Dérivées et intégrales des fonctions de variables réelles. Applications et extensions de la notion d'intégrale.

Bourdon, M., Application de l'algèbre à la géométrie, comprenant la géometrie analytique à deux et à trois dimensions. Ouvrage adopté par l'université. 9e éd., rev. et annotée. — XVIII+648 p. 8.

Introduction: Première méthode de traiter des questions de géométrie par le secours de l'algèbre. Première section: Géométrie analytique à deux dimensions. Seconde section: Géom. analyt. à trois dimensions. Notes de M. Darboux (p. 499—648).

Duhem, P., Recherches sur l'élasticité. — 218 p. 4.

De l'équilibre et du mouvement des milieux vitreux. Les milieux vitreux peu déformés. La stabilité des milieux élastiques. Propriétés générales des ondes dans les milieux visqueux et non visqueux.

Fouët, E. A., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques. 2e ed., entièrement refondue. T. 1: Les fonctions en général. — XIII+112 p. 8. Fr. 3,50.

Le nombre et la fonction. La notion de limite. Aperçu de la théorie des ensembles. Quelques classifications des fonctions. Les fonctions analytiques: Fonctions continues. Fonctions analytiques en un point. Fonctions analytiques dans un domaine.

Huntington, E. W., La continuo. Elementa teorio starigita sur la ideo de ordo kun aldono pri transfinitaj nombroj. Trad. de la angla lingvo . . . de Raoul Bricard, — X+125 p. 8. Fr. 2,75.

Lafitte, P. de, Essai sur le carré magique de N à N nombres. — 23 p. 8.

Maillet, E., Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions. — V+275 p. 8. Fr. 12—.

Quelques propriétés des fractions continues. Conditions suffisantes pour qu'un nombre soit transcendant; nombres de Liouville. Propr. arithm. des nombres de Liouville. Les nombres transc. considérés comme racines de séries infinies ou de fractions continues. Fonctions génératrices de nombres transc. S. la classificatiou des nombres irrationels ou transc. Les fractions décimales et les fract. continues quasi-périodiques. Quelques propr. arithm. des racines des eq. transc. Trauscendance de e et π; impossibilité de la quadrature du cercle. Extension aux séries à coefficients rationnels des propr. des polynomes à coeff. rationnels. Fonctions symétriques. S. l'extension de la notion de divisibilité et de réductibilité aux fonct. entières. S. la classification des fonct. entières. S. l'ordre des nombres de Liouville. S. les fonct. hypertranscendantes. Bibliographie.

PETROVITCH, M., La mécanique des phénomènes fondée sur les analogies. (Scientia. Phys.-math. No. 27.) — 95 p. 8.

Considérations préliminaires sur les analogies. Esquisse d'une mécanique générale des causes et de leurs effets. Schémas généraux représentant l'action des causes, Aperçu sur les application de la mécanique générale.

POINCARÉ, H., Leçons de mécanique céleste, professées à la Sorbonne. T. 2, 1re partie. Développement de la fonction perturbatrice. — 165 p. 8.

Le probl. de la fonct. perturb. Appl. des fonct. de Bessel. Propriétés générales de la fonct. perturb. Les coefficientsde Laplace. Les polynomes de Tisserand. Les opérateurs de Newcomb. Convergence des séries. Relations de récurrence et équations diff. Calcul numérique des coefficients. Termes d'ordre élevé.

RIOLLOT, J., Les carrés magiques. Contribution à leur étude. — IV + 119 p. 8. Fr. 5—.

Les figures de nombres sur l'échiquier. Propriétés des carrés magiques. Construction des carrés magiques.

E. van Goethem.

Gand 1905—06.

MASSAU, J., Discours sur les géométries non euclidiennes. — 26 p. 8.

MASSAU, J., Notes sur les géométries non euclidiennes. Fasc. 1. — 175 p. 8.

STUYVAERT, M., Les nombres positifs. Exposé des théories modernes de l'arithmétique élémentaire. — XII + 132 p. 8.

Les nombres entiers, fractionnaires, incommensurables. La mesure des grandeurs.

G. J. Göschen.

Leipzig 1906—07.

ADLER, A., Theorie der geometrischen Konstruktionen. (Sammlung Schubert 52.) — VIII + 301 p. 8. M. 9—. (geb.)

Methoden zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben. Konstrukt., ausgeführt durch blosses Ziehen von geraden Linien, wenn gegebene Figuren zur Benutzung vorliegen. (Steinersche Konstrukt.) Konstrukt., ausgeführt durch blosses Schlagen von Kreisbogen (Mascheronische Konstrukt.) . . . Unmöglichkeitsbeweise. Kreisteilung. Geometrische Konstrukt. dritten u. vierten Grades. Geschichtliche Bemerkungen üb. die Quadratur des Zirkels; . . . Geometrographie.

BACHMANN, P., Grundlehren der neueren Zahlentheorie. (Sammlung Schubert 53.) — XI + 270 p. 8. M. 6,80 (geb.)

Der rationale Zahlenkörper. Der quadratische Zahlenkörper.

GALLE, A., Geodäsie. Mit 96 Figuren. (Sammlung Schubert 23.) — Flächen. Linien. Punkte. — XI + 284 p. 8. M. 8—. (geb.)

Geyger, E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie für den Gebrauch an technischen Hochschulen . . . T. 1. — XVIII + 321 p. 8. M. 8—. (brosch.)

Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität und Perspektivität ebener Figuren. Perspektive, involutorische und harmonische Grundgebilde. Die Kegelschnitte als Kreisprojektionen. Die orthogonale axonometrische und schiefe Projektion. Orthogonale Projektionen von Ebenen und Körpern. Zylinder, Kegel. Kugel. Ebene- und Raumkurven. Durchdringungen von Kugel- Zylinder- und Kegelflächen.

Heun, K., Lehrbuch der Mechanik. T. 1: Kinematik mit einer Einleitung in die elementare Vektorrechnung. (Sammlung Schubert 37.) — XVI + 339 p. 8. M. 8—. (geb.)

Kinematik des Punktes. Elementare Punktsysteme. Kinematik des starren Körpers. Ketten aus starren Körpern. Allgemeine Systeme.

Jäger, G., Theoretische Physik. 1. Mechanik und Akustik. Dritte, verbesserte Aufl. (Samml. Göschen 76.) — 151 p. 8. M. 0,80 (geb.).

Mechanik eines Massenpunkts. Mechanik starrer Körper. Mechanik nichtstarrer Punktsysteme. Hydromechanik. Akustik.

Junker, Fr., Höhere Analysis. T. 1. Differentialrechnung. Dritte, verbesserte Aufl. (Samml. Göschen 87.) — 204 p. 8. M. 0,80 (geb.).

Vorbereitung zur Differentialrechnung. Differenzen, Differentiale u. Ableitungen 1. Ordn. Ableit. u. Differentiale höh. Ordn. Anwendung d. Diff.-rechn. zur Ermittlung d. Grenzwerte unbestimmter Formen. Konvergenz u. Divergenz d. Reihen. Reihenentwicklung d. Funktionen. Maxima u. Minima d. Funkt. Anwend d. Diff.-rechn. auf die ebene Geom., auf die Geom. des Raumes, auf die Mechanik.

Schubert, H., Aritmetik und Algebra. 2te durchges. Aufl. (Samml. Göschen 47.) — 171 p. 8. M. 0,80 (geb.).

Schubert, H., Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. Bd 3. — 250 p. 8. M. 4— (geb.).

Bestimmung von Schwerpunkten. Die Parabel in der elementaren analyt. Geom. Das Snelliussche Brechungsgesetz. Der Parallelkantner u. die allgemeine Volumenbestimmung. Üb. die Ausdehnung der Formel für das Volumen eines Obelisken. Das Formelsystem der sphärischen Trigonometrie. Herstellung heronischer sphärischer Dreiecke.

Zindler, K., Liniengeometrie mit Anwendungen. Bd 2. (Sammlung Schubert 51.) — VII + 252 p. 8. Mk 8— (geb.).

Regelflächen. Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen. Allgemeine Theorie der Komplexe.

D. C. Heath & Co.

Boston 1906—07.

Cohen, A., An elementary treatise on differential equations. — IX + 271 p. 8. $ 2—.

Osborne, G. A., Differential and integral calculus with examples and applications. Rev. ed. — XII + 388 p. 8. $ 2—.

Functions. Limit. Increment. Derivative. Differentiation. Successive differentiation. Differentials. Infinitesimals. Implicit functions. Series. Power series. Expansion of functions. Indeterminate forms. Maxima and minima of functions of one independent variable. Partial differentiation. Change of the variables in derivatives. Maxima and minima of functions of two or more variables. Curves for reference. Direction of curves. Tangents and normals. Direction of curvature. Radius of curvature. Evolute and involute. Order of contact. Osculating circle. Envelopes. Integration of standard forms. Simple applications of integration. Constant of integration. Integration of rational fractions. Integr. of irrational functions. Trigonometric forms readily integrable. Integr. by parts. Reduction formulæ. Integr. by substitution. Integr. as a summation. Definite integrals. Application of integration to plane curves. Appl. to certain volumes. Successive integr. Appl. of double integr. Surface, volume, and moment of inertia of any solid. Centre of gravity. Pressure of fluids. Force of attraction. Integrals for reference.

A. Hermann.

Paris 1906—07.

Ball, W. W. Rouse, Histoire des mathématiques. Ed. française rev. et augm. Trad. sur la 3e éd. anglaise par L. Freund. T. 2. Avec des additions de R. de Montessus. — 271 p. 8. Fr. 8—.

Les mathématiques modernes depuis Newton jusqu'à nos jours. Note complémentaire de M. G. Darboux.

Broggi, U., Traité des assurances sur la vie avec développements sur le calcul des probabilités. Trad. de l'italien par S. Lattès. — XI + 306 p. 8. Fr. 7,50.

Fondements math. et statistiques de la théorie. Probl. fondamentaux de la théorie math. des assur. s. la vie. Théorie du risque.

Duhem, P., Études sur Léonard de Vinci. Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. Première série. — VII + 355 p. 8. Fr. 12—.

Laurent, H., La géometrie analytique générale. — VII + 151 p. 8. Fr. 6—.

Les éléments. Mesure de l'étendue des variétés. Incursion dans le domaine concret. Les contacts. Surfaces algébriques. Les espaces homogènes. Surfaces du 2e degré. Quelques lieux géométriques. Théorèmes. Géométrie non-euclidienne.

S. Hirzel.

Leipzig 1906.

Drude, P., Lehrbuch der Optik. Mit 110 Abbildungen. 2te erweiterte Aufl. XVI + 538 p. 8. M. 12— (geh.). M. 13— (geb.).

Geometrische Optik. Physikalische Optik: Allgemeine Eigenschaften des Lichtes. Optische Eigenschaften der Körper. Die Strahlung der Körper.

Ulrico Hoepli.

Milano 1906.

Broggi, U., Matematica attuariale. Teoria statistica della mortalità. Matematica delle assicurazioni sulla vita. (Manuali Hoepli., XV + 344 p. 8. L. 3.50.

I fondamenti matematici e statistici. I problemi fondamentali della matem. delle assicur. sulla vita. La tecnica delle assicur. sulla vita. La teoria del rischio. —

Longman, Green & Co.

London 1906.

Gibbs, J. W., Scientific papers. In two volumes. Vol. I. XXVIII + 434 p. 8. Sh. 24—. Vol. II. 284 p. 8. Sh. 18—.

Vol. 1: Thermodynamics. With portrait. Biographical sketch [by H. A. Bumstead]. Graphical. methods in the thermodynamics of fluids. A method of geometrical representation of the thermodynamic properties of substances by means of surfaces. On the »equilibrium of heterogeneous substances.» On the vapor-densities of peroxide of nitrogen, formic acid, acetic acid, & perchloride of phosphorus. On an alleged exception to the second law of thermodynamics (Two letters . . .). Semi-permeable films & osmotic pressure. Unpubl. fragments of a suppl. to the »Equilibrium . . .» Vol. 2: *Dynamics:* On the fundamental formulæ of dynamics. On the fund. form. of statistical mechanics with applications to astronomy & thermodynamics (Abstract.). *Vector analysis & multiple algebra:* Elements of vector anal., arr. for the use of students i physics, On multiple alg. On the determ. of ellipt. orbits from 3 complete observations. On the use of the vector meth. in the determ. of orbits (Letter . . .). On the rôle of quatern. in the alg. of vectors. Quatern. & the »Ausdehnungslehre». Quatern. & the alg. of vectors. Quatern. & vector analysis. *The electromagnetic theory of light:* On double refraction and the dispersion of colors in perfectly transparent media. On double refract. in perf. transp. media which exhibit the phenomena of circular polarization. On the general eq. of monochromatic light in media of every degree of transparency. A comparison of the elastic & the electr. theories of light with respect to the law of double refract. & the dispers. of colors. A compar. of the electr. theory of light & Sir William Thomson's theory of a quasi-labile ether. *Miscellaneous papers:* Review of Newcomb and Michelson's »Velocity of light in air and refracting media» and of Ketteler's »Theoretische Optik.» On the velocity of light as determined by Foucault's revolving mirror. Velocity of propagation of electrostatic force. Fourier's series. R. J. E. Clausius. H. A. Newton.

Macmillan & Co., Ltd.

London. New York 1906.

Carslaw, H. S., Introduction to the theory of Fourier's series and integrals and the mathematical theory of the conduction of heat. — XVII + 434 p. 8.

R. Oldenbourg.

München und Berlin 1904.

Nernst, W., und Schönflies, A., Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefasstes Lehrbuch d. Diff.-u. Int.-rechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. Aufl. 4. — XII + 370 p. 8. M. 11 — (brosch.), M 12,50 (geb.).

Die Elemente d. analyt. Geom. Die Grundbegriffe d. Diff.-rechnung. Differentiation d. einfachen Funkt. Die Int.-rechnung. Anvendung d. Int.-rechnung. Bestimmte Integrale. Die höh. Diff.-quotienten u. die Funkt. mehrerer Variabeln. Unendl. Reihen u. Taylorscher Satz. Theorie d. Maxima u. Minima. Auflösung numerischer Gleichungen. Differentiation u. Integration empirisch festgestellter Funkt. Beispiele aus d. Mechanik u. Thermodynamik. Übungsaufgaben. Anhang: Formelsammlung. —

Mayer & Müller.

Berlin 1906.

Fields, J. C., Theory of the algebraic functions of a complex variable. VII + 186 p. 4. M. 15— (brosch.) M. 15,50 (geb.).

Classification of values of z. Method of deformation of a product. Sets of orders of coincidence for a value $z = a$. Adjoint orders of coincidence. Degree of function as related to orders of coincidence at ∞. Sets of complementary adjoint ordres of coincidence. Conditions for certain sets of ordres of coincidence for $z = a$. Modified formulation of conditions. Rational functions which are restricted for all values of z. The equations of condition. The complementary theorem. The genus and the φ- functions. Riemann-Roch theor. Related theor. Plückers formulæ. The Abelian integrals.

Fuchs, L., Gesammelte mathematische Werke. Hrsg. von Richard Fuchs and Ludwig Schlesinger. Bd 2: Abhandlungen (1875—1887) red. von L. Schlesinger. — X + 485 p. 4. M. 30—

The Open Court Publishing Company.

Chicago 1903—06.

Fink, K., A brief history of mathematics. An author. transl. of Dr. Karl Fink' Geschichte der Elementar-Mathematik by W. W. Beman and D. E. Smith. 2:d rev. ed. — XII + 333 p 8.

Mach, E., Space and geometry in the light of physiological, psychological and physical inquiry. From the german by Thomas J. Mc Cormack. 148 p. 8.

On physiological, as distinguished from geometrical, space. On the psychology and natural development of geometry. Space and geometry from the point of view of physical inquiry. —

Row, S., Geometric exercises in paper folding. Ed. and rev. by W. W. Beman and D. E. Smith. With 87 illustrations. — XIV + 148 p. 8.

Withers, J. W., Euclid's parallel postulate: its nature, validity, and place in geometrical systems. (Thesis presented to the phil. fac. of Yale univ. for the degree of doctor of phil.). — 192 p. 8.

Puttkammer & Mühlbrecht.

Berlin 1906.

Schmigalla, P., Tendenzstatistik auf dem Gebiete der Lebensversicherung. 56 p. 8. Mk 2—.

Vergleiche betr. die Bewegung des Versicherungsbestandes. Vergl. betr. die Gewinn quellen der Lebensversicherungs-Anstalten.

Stab. Tipogr. Succ. Fratelli Nistri.

Pisa 1907.

Dini, U., Lezioni di analisi infinitesimale. Riprodotte con alcune modificazioni e aggiunte dalle Lezioni dettate la prima volta nell'anno scolastico 1876—77 nella Regia Università di Pisa, e successivamente autografate nel 1877—78. Vol. 1: Calcolo differenziale. — CI + 720 p. 8. L. 22—.

B. G. Teubner.

Leipzig 1906.

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Aufl. 2. Bd 2. — VIII + 532 p. 8.

Grundlagen der Integralrechnung. Unbestimmte Integrale. Einfache und mehrfache bestimmte Integrale. Anwendungen der Integral-Rechnung. Differentialgleichungen.

Vivanti, G., Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Umarb. unter Mitwirk. d. Verfassers. Deutsch hrsg. von A. Gutzmer. — IV + 512 p. 8. M. 12— (geb.).

Elemente der Mengenlehre. Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen. Ergänzungen zur Theorie der analytischen Funktionen.

Vieweg & Sohn.

Braunschweig 1907.

Wangerin, A., Franz Neumann und sein Wirken als Forscher und Lehrer. Mit einem Bildniss Neumanns in Heliogravüre. (Die Wissenschaft. Samml. naturwiss. u. math. Monographien. H. 19.) — X + 185 p. 8.

John Wiley & Sons.

New York 1903—07.

Dickson, L. E., Introduction to the theory of algebraic equations. — V+104 p. 8. $ 1,25. (cloth.)

Manning, H. P., Irrational numbres and their representation by sequenses and series. — VI+123 p. 8. $ 1,25. (cloth.)

Martin, L. A., Text-book of mechanics. Vol. 1. Statics. — XII+142 p. 8. $ 1,25. (cloth.)

Analytical statics: Forces acting at a single point. Forces act. on a rigid body. Applications of the principles of statics to the simple machines. Graphical statics: Graphical arithmetic. Forces act. at a single point. Forces acting on a rigid body. Applications to structures.

Martin, L. A., Text-book of mechanics. Vol. 2: Kinematics and kinetics. — XIV+214 p. 8.

Rectilinear motion of a particle. Curvilinear motion of a particle. Motion of a rigid body. Kinetics. Kinetics of a particle and of the mass-center of a rigid body. Constrained motion. Kinetics of a rigid body. Work and energy. Impact.

Veblen, O., and Lennes, N. J., Introduction to infinitesimal analysis. Functions of one real variable. — VII+227 p. 8. $ 2.00. (cloth.)

The system of real numbers. Sets of points and of segments. Functions in general. Special cases of functions. Theory of limits. Continuous functions. Infinitesimals and infinites. Derivatives and differentials. Definite integrals. Improper definite integrals.

Williams and Norgate.

London 1906.

Shearman, A. T., The development of symbolic logic. A critical-historical study of the logical calculus. — XI+242 p. 8. Sh. 5—.

Symbols as representing terms and as representing propositions. Symbols of operation. The process of solution. Concerning a calculus based on intension. The doctrines of Jevons and of Mr. MacColl. Later logical doctrines. The utility of symbolic logic

Nicola Zanichelli.

Bologna 1906—07.

Bonola, R., La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo. — VI+213 p. 8. L. 5—.

I demostratori del V postulato euclideo. I precursori delila geometria non-euclidea. I fondatori della geom. non-euclidea. I successivi sviluppi della geom. non-euclidea. I principe fondamentali della statica e il postulato d'Euclide. Le parallele e la superficie di Clifford. Cenni sul problema di Clifford-Klein.

Pincherle, S., Lezioni di algebra complementare dettate nella R. Università di Bologna. P. 1. Analisi algebrica. — 366 p. 8. L. 10—.

Righi, A., La moderna teoria dei fenomeni fisici (radioattività, ioni elettroni). Terza ed., consider. ampliata. — X+290 p. 8.

Ioni elettrolitici ed elettroni. Gli elettroni ed i fenomini luminosi. Natura dei raggi catodici. I ioni nei gas e nei solidi. La radioattività. Le trasformazioni atomiche dei corpi radioattivi. Massa, velocità e carica elettrica dei ioni e degli elettroni. Gli elettroni e la costituzione della materia. Bibliografia.